Oraux de Centrale

Maths - Informatique

Collection d'énoncés

Les questions marquées d'un `[P]` sont à faire (au moins en partie) à l'aide du logiciel Python.

Analyse

Suites et séries numériques, développements asymptotiques

Exercice I.1:

On étudie les suites réelles vérifiant la relation de récurrence $x_{n+2} = \dfrac{x_{n+1}}{n+1} + x_n$ (R).
On pose (a_n) la suite vérifiant (R) telle que $a_0 = 1$ et $a_1 = 1$.
On pose (b_n) la suite vérifiant (R) telle que $b_0 = 0$ et $b_1 = 1$.

1) `[P]` Définir une fonction `X(n,x0,x1)` renvoyant la liste $[x_0, ..., x_n]$ des $n+1$ premiers termes de la suite vérifiant (R) et telle que $x_0 =$ `x0` et $x_1 =$ `x1`.
2) Afficher les 20 premiers termes de (a_n) et (b_n). Que peut-on conjecturer ?
3) Calculer explicitement a_n et b_n.
4) Déterminer la limite de a_n/b_n.

Exercice I.2:

Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, (E_n) l'équation : $x^n + x^{n-1} + ... + x - 1 = 0$

1) Monter que pour tout n, (E_n) admet une unique solution positive, notée u_n.
2) `[P]` Afficher les valeurs de u_n pour $n \in [\![1, 100]\!]$.
3) Que peut-on conjecturer sur u_n ? Le démontrer.

Exercice I.3:

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

1) (a) `[P]` Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge et en donner une valeur approchée à 10^{-6} près.
   (b) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \ln(2)$.
2) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite qui alterne, dans l'ordre, deux termes positifs de (u_n) et un terme négatif.
   On pose $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$.

(a) `[P]` Ecrire une fonction qui calcule v_n (on pourra distinguer selon le reste de n modulo 3).

(b) `[P]` Conjecturer la limite de T_n, puis démontrer cette conjecture.

Exercice I.4:

Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}}$. Soit $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} u_k$.

1) `[P]` Calculer les 20 premiers termes de (P_n).
2) Conjecturer la limite de (P_n) puis démontrer cette conjecture.

Exercice I.5:

Pour $n \geq 2$ entier, soit A_n la matrice définie par $a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ j & \text{sinon} \end{cases}$.

1) `[P]` Calculer les valeurs propres de A_n pour $n \in \{2, 3, 4, 10\}$.
2) Montrer que les valeurs propres λ de A_n sont les solutions de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+\lambda} = 1$.
3) Dénombrer le nombre de valeurs propres distinctes de A_n et préciser leur localisation.
4) On note x_n la valeur propre située dans $]-2, -1[$. Etudier la monotonie et la convergence de (x_n).
5) Donner un développement asymptotique à deux termes de x_n.

Exercice I.6:

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$.

1) `[P]` Pour $n \in [\![0, 50]\!]$, calculer u_n. Formuler une conjecture quant à sa convergence, et la démontrer.
2) (a) `[P]` Soient $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ des réels, et pour $n \in \mathbb{N}$, $s_n = (an^2+bn+c)u_{n+2} + (dn^2+en+f)u_{n+1} + (gn^2+hn+i)u_n$.
   Ecrire un programme prenant n en argument et renvoyant s_n.

   (b) `[P]` Montrer qu'il existe un choix non trivial des réels $a, b, ..., h, i$ tel que pour tout $n \in \{0, 10\}$ on ait $s_n = 0$.

   (c) `[P]` Pour ce choix de réels, calculer s_n pour $n \in [\![1, 100]\!]$. Formuler une conjecture relative à s_n et la démontrer.
3) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $x_n = \dfrac{2^{n+1}}{n+1} u_n$ et $y_n = x_{n+1} - x_n$. Trouver une relation entre y_{n+1} et y_n.
   Calculer y_n puis x_n puis u_n.
4) Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k}$.

Intégrales

Exercice I.7:

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+/infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$

1) Montrer que f est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique $r_n \in [n\pi, (n+1)\pi]$ tel que $f(r_n) = 0$.
3) `[P]` Ecrire un programme renvoyant les r_n. Tester pour 1,2,3,4.
4) `[P]` Tracer le graphe de f sur $[0, \pi]$. Que constate-t-on ? Le montrer.

Exercice I.8:

On considère les fonctions définies par $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \dfrac{x^5 - x + 1}{(x^2+1)^n}$.

1) Etudier l'intégrabilité de f_n sur $\mathbb{R}_+$.
2) (a) `[P]` On pose, quand cela a un sens, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$.
   Ecrire un programme permettant de calculer ces intégrales.
   (b) `[P]` Tester ce programme pour n allant de 4 à 20.
3) Soit $n \geq 4$. On pose $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2+1)^n} dt$ et $W_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)^n} dt$.
   (a) Exprimer I_n en fonction de J_n et W_n.
   (b) En déduire I_n en fonctiond de n.
   (c) Donner la nature de la suite (I_n).
4) Donner la nature de la série de terme général I_n.

Exercice I.9:

On sait que pour tout $x \in [0,1]$ il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $[\![0,9]\!]$ telle que x s'écrive $0.a_1a_2a_3...$ en base 10.

On définit $f : [0,1] \to [0,1]$ par $f(0) = 0.1$ et $f(0.a_1a_2...) = 0.a_2a_3....$

1) `[P]` Donner la représentation graphique de f.
2) f est-elle continue sur $[0,1]$? continue par morceaux ?
3) `[P]` Donner une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

Exercice I.10:

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on définit :

$$u_n = \left(n \int_0^1 f\right) - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \qquad \text{et} \qquad v_n = \left(n^2 \int_0^1 f\right) - n \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)$$

1) `[P]` Ecrire une fonction qui prend en argument un entier N et une fonction f, et représente les valeurs prises par les suites (u_n) et (v_n) jusqu'au rang N. Tester cette fonction avec diverses valeurs de N et différentes fonctions f.
2) Rappeler l'inégalité de Taylor-Lagrange et ses hypothèses.
3) On suppose f de classe $\mathscr{C}^2$. Montrer que $u_n \to \dfrac{f(0)+f(1)}{2}$.
4) On suppose f de classe $\mathscr{C}^3$. Trouver la limite de v_n.

Exercice I.11:

Soit $g : x \in]0,1] \mapsto x^x$.

1) Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que si on pose $g(0) = \alpha$, g soit continue sur $[0,1]$.
2) `[P]` Donner la représentation graphique de g.
3) `[P]` Expliciter l'allure de g en 0 et donner son minimum.
4) `[P]` Donner une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx$.
5) Trouver une suite (u_n) telle que $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ puis donner la valeur de cette intégrale sous forme de série.

Exercice I.12:

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt$.

1) `[P]` Tracer F sur l'intervalle $]0, 6\pi[$.
2) Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, prolongeable par continuité en 0.
3) `[P]` Etudier le signe de $F(n\pi)$ pour $n \in [\![1, 20]\!]$. Que constate-t-on ?
4) Montrer que F s'annule au moins 1 fois sur chaque intervalle $]n\pi, (n+1)\pi[$, $n \in \mathbb{N}$.

Suites et séries de fonctions

Exercice I.13:

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2\pi^2}\right)$.

1) Calculer u_n pour $n \in [\![1, 10]\!]$, puis u_{10^n} pour $n \in [\![1, 4]\!]$. Que peut-on conjecturer ?
2) (a) Soient f et g deux fonctions définies sur $]0, \pi[$ par $f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}$ et $g(t) = \dfrac{\cos t}{\sin t} - \dfrac{1}{t}$.
   Quelle est la limite de g en 0 ? Montrer que f et g sont continues sur $[0, \pi[$.
   (b) `[P]` Tracer f et g sur $]0, \pi[$. Que peut-on conjecturer ? On admettra ce résultat.
   (c) En calculant $G(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)dt$ de deux façons, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2\pi^2}\right)$.
   (d) En déduire la limite de (u_n).

Exercice I.14:

On pose $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1) `[P]` Ecrire une fonction qui calcule F_n. Calculer F_{50}.
2) Pour tout couple $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ on note $U_n(m)$ le reste de la division euclidienne de F_n par m.
   (a) `[P]` Ecrire une fonction qui calcule $U_n(m)$. Calculer $U_{100}(m)$ pour quelques petites valeurs de m. Tracer le graphe de $n \mapsto U_n(m)$ pour m fixé et n variant entre 0 et 200.
   (b) Soient a, p deux entiers non nuls. Montrer que :
$$(U_{a+p}(m), U_{a+p+1}(m)) = (U_a(m), U_{a+1}(m)) \iff [U_p(m) = 0 \text{ et } U_{p+1}(m) = 1]$$
3) `[P]` Montrer que la suite $(F_n(m))_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique. Ecrire une fonction qui en donne la période pour tout entier m non nul. Application avec $m = 3$.
4) Etude de la série entière $\sum U_n(m)x^n$.

Exercice I.15:

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{1}{4^n}\dbinom{2n}{n}$.

1) Trouver une relation simple entre a_n et a_{n+1}
2) `[P]` Ecrire une fonction qui prend n en variable et renvoie $[a_0, ..., a_n]$.
3) `[P]` On définit, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}\backslash(-\mathbb{N})$, $S_n(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{x+i}$.
   Ecrire une fonction qui prend n et x en variables et renvoie $S_n(x)$.
4) Tracer la courbe de S_{100} pour $x \in [-4.008, 4.008]$ avec 200 points, en limitant les ordonnées à $[-5, 5]$.
5) Montrer que $S = \lim S_n$ est bien définie et $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash(-\mathbb{N})$.

Exercice I.16:

Soit $f : x \mapsto x^3 + x$.

1) Montrer que f est une bijection de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, dont la réciproque g est également $\mathscr{C}^\infty$, impaire et strictement croissante.
2) Donner un DL de g à la précision $o(x^5)$ en 0.
3) Donner un développement asymptotique de g à trois termes quand $x \to +\infty$.
4) On définit une suite de fonctions (u_n) telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u_0(t) = t$, et $u_{n+1}(t)$ soit l'abscisse du point d'intersection de la tangente au graphe de f en le point d'abscisse $u_n(t)$ avec la droite horizontale d'équation $y = t$.
5) Exprimer $u_{n+1}(t)$ en fonction de $u(t)$.
6) `[P]` Tracer les graphes de u_0, u_1, u_2, u_3.

Exercice I.17:

On pose $\delta_0 : x \in [0,1] \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1/2] \\ 1-x & \text{si } x \in [1/2,1] \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\delta_{n+1} : x \in [0,1] \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}\delta_n(2x) & \text{si } x \in [0,1/2] \\ \frac{1}{2}\delta_n(2x-1) & \text{si } x \in [1/2,1] \end{cases}$

1) `[P]` Définir une fonction récursive pour calculer δ_n, puis afficher les graphes de ces fonctions pour différentes valeurs de n. Formuler des conjectures.
2) `[P]` On pose $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_n$, montrer que S est définie et continue sur $[0,1]$.
   Tracer le graphe de S.
3) On fixe $\alpha \in [0,1]$ et on définit $x_n = \dfrac{\lfloor 2^{n+1}\alpha \rfloor}{2^{n+1}}$ et $y_n = \dfrac{\lfloor 2^{n+1}\alpha \rfloor + 1}{2^{n+1}}$
   (a) Soit $p \in \mathbb{N}$: pour $k \geq p+1$ comparer $\delta_k(x_p)$ et $\delta_k(y_p)$. On pourra étudier les racines de δ_{n-1} en comparaison à celles de δ_n.
   (b) Pour $k \leq p$ montrer que $\dfrac{\delta_k(y_p) - \delta_k(x_p)}{y_p - x_p} \in \{-1, 1\}$.
   (c) Montrer que $\dfrac{S(y_p) - S(x_p)}{y_p - x_p}$ possède la même parité que $p+1$.
4) Soient (u_n) et (v_n) des suites réelles convergeant vers la même limite l, et λ_n une suite à valeurs dans $[0,1]$. Montrer que $\lambda_n u_n + (1-\lambda_n)v_n \to l$.
5) Qu'en déduire concernant la dérivabilité de S en α ?

Exercice I.18:

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$.

1) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f et montrer qu'elle est continue sur $]-1,1[$.
2) En calculant $f(1/x)$, montrer qu'elle est continue sur $\mathcal{D}$.
3) `[P]` Représenter sa courbe.
4) En comparant f à une intégrale, montrer que $\forall x \in]0,1[$, $\dfrac{-\pi}{4\ln x} \leq f(x) \leq 1 - \dfrac{\pi}{4\ln x}$. En déduire un équivalent de f en 1^- puis en 1^+.
5) Montrer que f est bornée au voisinage de -1.

Exercice I.19:

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on définit $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \mathrm{e}^{-nx} \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{(nx)^k}{k!}$.

1) [P] Tracer les graphes des f_i pour $i \in [\![1,5]\!]$ puis pour $i \in \{1,2,5,20,100\}$. Emettre une conjecture sur la convergence simple.
2) Soient $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$:
   (a) Montrer que $1 - f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx} \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(nx)^k}{k!}$.
   (b) Montrer que $0 \leq 1 - f_n(x) \leq \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}(nx)^n}{n!(1-x)}$.
   (c) Conclure sur la conjecture précédente pour $x \in [0,1[$.
3) Soit $x \in]1,+\infty[$. Montrer que $0 \leq f_n(x) \leq \dfrac{n}{n!}(nx)^n \mathrm{e}^{-nx}$.
   En déduire que $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ si $x > 1$.
4) Etudier le cas $x = 1$.

Exercice I.20:

Soient p et q deux nombres premiers distincts. Soient $A = (1-X^p)(1-X^q)$, $B = (1-X^{pq})(1-X)$, $Q = \dfrac{B}{A}$ et $T = \dfrac{Q - Q(1)}{X-1}$.

1) [P] On prend ici $p = 5$ et $q = 3$. Montrer que Q et T sont dans $\mathbb{Z}[X]$. Calculer $Q(1)$ et $T(0)$.
2) On revient au cas général. Montrer les résultats constatés en 1).
3) On pose $c_n = |\{(u,v) \in \mathbb{N}^2, up + vq = n\}|$. Montrer que $z \mapsto \dfrac{1}{(1-z^p)(1-z^q)}$ est développable en série entière au voisinage de 0, donner son rayon de convergence. Exprimer les coefficients à l'aide des c_n.
4) [P] On reprend $p = 5$ et $q = 3$. Calculer c_n pour $n \in [\![0,99]\!]$. Comparer c_{n+15} et c_n pour $n \in [\![0,84]\!]$. Expliciter $\{(u,v) \in \mathbb{N}^2, 5u + 3v = 43\}$.
5) Exprimer $\dfrac{1-z^{pq}}{(1-z^p)(1-z^q)}$ en fonction de $T(z)$. En déduire une relation entre c_{n+pq} et c_n pour tout n.

Topologie, espaces normés

Exercice I.21:

On identifie $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$.

1) Montrer qu'il existe une norme N sur $\mathbb{R}^2$ telle que la boule unité pour N soit un octogone ayant pour sommets les racines 8-ièmes de l'unité. Déterminer N.
2) [P] Dessiner un triangle équilatéral pour N.

Exercice I.22:

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Pour $Z = (z_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille de vecteurs de E, on appelle enveloppe convexe de Z l'ensemble

$$\mathrm{Conv}(Z) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i z_i \;\middle|\; \forall i \in [\![1,n]\!],\ a_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \right\} \subset E$$

Pour $P \in \mathbb{C}[X]$ on note $\mathrm{Rac}(P)$ l'ensemble de ses racines.

1) (a) Soit P un polynôme de degré 2, α et β ses deux racines. Exprimer la racine de P' en fonction de α et β.
   (b) Soit P un polynôme de degré n. Que dire de la racine de $P^{(n-1)}$?
2) (a) [P] Ecrire une fonction qui prend comme argument un polynôme et renvoie la représentation de ses racines dans le plan complexe.

(b) `[P]`Ecrire une fonction qui prend comme argument un polynôme et renvoie la représentation de ses racines et des racines de son polynôme dérivé. On utilisera la fonction `plt.waitforbuttonpress()` pour afficher les racines une à une. Que peut-on conjecturer sur $\mathrm{Rac}(P')$ et $\mathrm{Conv}(\mathrm{Rac}(P))$?

3) (a) Soit $(z_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in E^n$. Montrer que $0 \in \mathrm{Conv}((z_i)_{i\in[\![1,n]\!]}) \iff 0 \in \mathrm{Conv}((1/z_i)_{i\in[\![1,n]\!],z_i\neq 0})$

(b) Soit $\phi : Q \in \mathbb{C}_p[X]\backslash\{0\} \mapsto Q'/Q$. Montrer que ϕ transforme les produits en sommes.

(c) En déduire la décomposition en éléments simples de P'/P.

(d) Démontrer que toute racine de P' est dans l'enveloppe convexe des racines de P.

4) Montrer que pour $A \subset E$, l'intersection des parties convexes de E contenant A est la plus petite partie convexe de E contenant A. Si A est finie, montrer que c'est bien l'ensemble défini plus haut.

Exercice I.23:

On munit $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$.
Pour $f \in E$ on pose

$$T(f) : x \in [0,1] \mapsto \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)$$

1) Montrer que T est un endomorphisme continu de E et calculer $\displaystyle\sup_{f\in E\backslash\{0\}} \frac{\|T(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty}$.

2) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], \qquad T^n(f)(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x+k}{2^n}\right)$$

3) `[P]`Lorsque $f : t \mapsto \sin(\pi t)$, tracer le graphe de $T^n(f)$ pour $n \in [\![0,5]\!]$.

4) Soit F la partie de E formée des fonctions lipschitziennes.

(a) Montrer que F est un sev de E stable par T.

(b) Soit $f \in F$. Si $\rho(f)$ désigne la constante de Lipschitz de f, montrer que $\rho(T(f)) \leq \rho(f)/2$.

(c) Montrer que si $f \in F$, $\displaystyle\|T^n(f) - \int_0^1 f\|_\infty \leq \frac{\rho(f)}{2^n}$.

5) Que dire des valeurs propres de T ? De celles associées à un vecteur propre f d'intégrale nulle ?

Exercice I.24:

Soient $p \in \mathbb{N}$ et (a_n) une suite réelle strictement croissante telle que $a_0 = 1$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$.

On suppose que $a_n \neq p$ pour tout n.
On définit une suite (f_n) de fonctions par $\forall x \in]0,1]$, $f_0(x) = x^p$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{n+1}(x) = (a_{n+1} - p)x^{a_{n+1}} \int_x^1 t^{-1-a_{n+1}} f_n(t)dt$$

1) `[P]`On suppose $p = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sqrt{2n+1}$. Représenter les fonctions $f_1, ..., f_6$ sur un même graphe.

2) On revient au cas général. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$ de la forme $x \mapsto x^p + g_n(x)$, où $g \in \mathrm{Vect}(x \mapsto x^{a_k}, k \in [\![0,n]\!])$.

3) Montrer que pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle|f_n(x)| \leq \prod_{k=1}^{n}\left|1 - \frac{p}{a_k}\right|$.

4) En déduire la convergence uniforme de (f_n) sur $[0,1]$ vers une fonction à déterminer.
Conclure sur l'adhérence, dans l'espace $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$, de $\mathrm{Vect}(x \mapsto x^{a_k}, k \in \mathbb{N})$.

Exercice I.25:

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ fixé. On note $A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid P(M) = 0\}$. On appelle point isolé de A une matrice $M \in A$ telle qu'existe $r > 0$ vérifiant $B(M,r) \cap A = \{M\}$.

1) Que dire de A et de ses points isolés quand $n = 1$?

2) Montrer qu'il existe V_1 voisinage de la matrice nulle tel que $\forall H \in V_1$, $I_n + H$ soit inversible.

3) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Construire (M_k) injective vérifiant $\lim\limits_{k\to\infty} M_k = \lambda I_n$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $(M_k - \lambda I_n)^2 = 0$.

4) Montrer qu'il existe V_2 voisinage de la matrice nulle tel que $\forall H \in V_2$, $(I_n + H)M(I_n + H)^{-1} = M$.

5) En déduire que M commute avec tous les éléments de $\mathbb{C}$, puis que M est une homothétie dont on précisera le rapport.

6) Montrer en utilisant 3) que si λ est racine de P de multiplicité 2 ou plus, λI_n n'est pas un point isolé de A.

7) Montrer que si λ est racine simple de P, λI_n est un point isolé de A.

Calcul différentiel

Exercice I.26:

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} x(t) = t^3 - 3t \\ y(t) = 3t(t-2) \end{cases} \qquad \text{pour} \quad t \in \mathbb{R}$$

1) `[P]` Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.

2) Quels sont les points réguliers ? Quels sont les points où les tangentes à $(\mathcal{C})$ sont verticales ?

3) On note $\begin{pmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \end{pmatrix}$ les coordonnées du point P à partir duquel on peut tracer deux droites perpendiculaires tangentes à la courbe en $M(t)$ et $M(t_1)$. Déterminer l'expression de x_p et y_p. Donner une relation entre t_1 et t.

4) `[P]` Tracer la courbe des points $M_p(t)$.

5) Déterminer son équation cartésienne.

Exercice I.27:

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha y}{y^2 + y^4} & \text{si } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1) `[P]` Représenter f pour $\alpha \in \{1, 3/2, 2, 3\}$.

2) Donner une CNS sur α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.

3) Calculer ses dérivées partielles lorsqu'elles existent.

Exercice I.28:

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\forall X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tXAX \geq 0$, avec égalité si et seulement si $X = 0$ (on dit que A est symétrique définie positive, comme le produit scalaire).

On étudie le système (S_A) d'inconnue $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = x_i |x_i|$$

On pose

$$F_A : (x_1, ..., x_n) \mapsto \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} x_i x_j - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^3$$

1) L'application F_A est-elle de classe $\mathscr{C}^1$? de classe $\mathscr{C}^2$?

2) `[P]` Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice A est-elle définie positive ?
   Résoudre (S_A).
   Tracer sur la même figure le plan d'équation $z = 0$ et celui d'équation $z = F_A(x,y)$. Commenter.

3) Retour au cas général.

(a) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que $\forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\alpha \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} x_i x_j \leq \beta \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

(b) Montrer que F_A présente un maximum.

(c) Montrer que (S_A) admet une solution non nulle.

Equations différentielles

Exercice I.29:

On étudie l'équation différentielle (E) :

$$\mathrm{sh}(x)^5 y'(x) + 2\mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(x)^2 y(x) = \mathrm{ch}(x)^3$$

1) (a) Quelle est la nature de cette ED ? Sur quels domaines l'étudier ?

(b) Résoudre l'équation homogène sur les domaines précédents.

2) (a) `[P]` Tracer la solution vérifiant $y(1) = 1$ sur l'intervalle $[1, 10]$ avec un pas de 0.01
Conjecturer le comportement de cette solution au voisinage de 0.

(b) `[P]` Vérification : tracer à rebours la même solution sur l'intervalle $[0.1, 1]$ avec un pas de 0.01

3) (a) Trouver une primitive de $t \mapsto (t-1)\mathrm{e}^t$.

(b) Trouver la solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ satisfaisant $y(1) = 1$

(c) Existe-t-il une solution de (E) continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice I.30:

1) Résoudre l'équation différentielle $y'' - y = \mathrm{e}^{-|t|}$. Existe-t-il des solutions tendant vers 0 en $\pm\infty$?

2) Résoudre l'équation différentielle $y'' - y = f(t)$ où $f(t) = t \cos t$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$ et 0 ailleurs. Existe-t-il des solutions à support compact ?

3) Soit l'équation différentielle $y'' - y = f(t)$ où f est continue à support compact. A quelle condition nécessaire et suffisante sur f admet-elle une solution à support compact ?

Exercice I.31:

Soient $t_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $q : [t_0, +\infty[$ une fonction continue.

On s'intéresse à l'équation différentielle (E) : $y'' + qy = 0$. Soient y une solution de (E) non identiquement nulle.

1) Soit a_0 un réel tel que $y(a_0) = 0$. Montrer qu'il existe ε tel que y ne s'annule pas sur $[a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon] \backslash \{a_0\}$.

2) `[P]` Tracer le graphe de y pour des conditions initiales de votre choix avec $q(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$ puis $q(x) = \dfrac{\pi x^2}{1+x}$.
On admet que les zéros de y sont isolés et forment une suite (x_n) strictement croissante. A l'aide des tracés, conjecturer la limite de la suite $(x_{n+1} - x_n)$.

3) On suppose qu'il existe un réel $p > 0$ tel que la fonction q vérifie $q \geq p^2$. On souhaite montrer que y s'annule sur tout intervalle de longueur $\geq \dfrac{\pi}{p}$.
Soit $[a, b]$ un tel intervalle. On pose : $z(t) = \sin(p(t-a))$ et $W(t) = y(t)z'(t) - y'(t)z(t)$.

(a) Exprimer W' en fonction de p, q, y et z.

(b) En déduire le résultat en raisonnant par l'absurde (on pourra s'intéresser au signe de W').

(c) Montrer que la suite (x_n) est infinie et de limite infinie en l'infini.

Algèbre

Algèbre linéaire

Exercice II.1:

Les matrices "serpents" sont des matrices que l'on remplit d'entiers naturels en serpentant.

En voici un exemple : $M(3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

1) `[P]` Définir une fonction `M(n,i,j)` qui renvoie le coefficient $m_{i,j}$ de $M(n)$.
2) `[P]` Définir une fonction qui affiche la matrice serpent d'ordre n. La tester pour $n \in [\![1, 5]\!]$.
3) `[P]` Calculer le rang des matrices $M(n)$ pour $n \in [\![1, 10]\!]$ (faire les 5 premières à la main). Conjecturer.
4) `[P]` Ecrire la fonction premettant d'afficher la ligne brisée formée par les points $(k, \mathrm{Tr}(M(k)))_{k\in[\![1,N]\!]}$. L'exécuter pour $N = 100$ puis $N = 1000$.
5) `[P]` Afficher les 100 premières valeurs de $\mathrm{Tr}(M(n))/n^3$. Commenter.

Exercice II.2:

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable, de valeurs propres distinctes $\lambda_1, ..., \lambda_m$.

1) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\exp(tA) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \mathrm{e}^{\lambda_j t} \prod_{k\neq j} \frac{A - \lambda_k I_n}{\lambda_j - \lambda_k}$.
2) `[P]` Soit $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{10}(\mathbb{C})$ telle que $b_{i,j} = 1$ si $i = j$ ou $i = 1$ ou $j = 1$, et $b_{i,j} = 0$ sinon. Calculer et factoriser le polynôme caractéristique de B. Calculer $\exp(tB)$.
3) Interpréter les matrices $\dfrac{A - \lambda_k I_n}{\lambda_j - \lambda_k}$.

Exercice II.3:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$: on définit $M_n = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $m_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{si } i = j < n \\ 1 & \text{si } i = j = n \\ -1 & \text{si } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

On définit $B_n = (b_{i,j})$ par $b_{i,j} = 1$ si $i \geq j$, 0 sinon. On définit $S_n = (s_{i,j})$ avec $s_{i,j} = 1$ si $i = j + 1$, 0 sinon.

1) (a) `[P]` Ecrire les fonctions renvoyant M_n, B_n, S_n.
   (b) Montrer que $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} S_n^k$ puis que $B_n^{-1} = I_n - S_n$.
   (c) `[P]` Calculer, pour $2 \leq n \leq 5$, $M_n \cdot B_n \cdot {}^t B_n$.
2) On note $P_n = \chi_{M_n}$ avec $P_0 = 1$.
   (a) Déterminer une relation entre P_n, P_{n-1} et P_{n-2} (on doit trouver $P_n(X) = (2-X)P_{n-1}(X) - P_{n-2}(X)$ par développements selon les lignes et les colonnes).
   (b) Montrer que $P_n\left(4\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right) = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$.

Exercice II.4:

Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels. Soit la matrice

$$A(\alpha)=\begin{pmatrix}\alpha_1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ -1 & \alpha_2 & -1 & \ddots & \vdots & 0 & 0\\ 0 & -1 & \alpha_3 & \ddots & \ddots & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & \ddots & \ddots & \alpha_{n-2} & -1 & 0\\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & -1 & \alpha_{n-1} & -1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \alpha_n\end{pmatrix}$$

1) (a) `[P]`Écrire une fonction `A(L)` qui prend en argument une liste `L` correspondant à la suite α et retourne la matrice $A(\alpha)$. Vérifier le bon fonctionnement avec `L=[2,3,4,5,6]`.
   (b) `[P]`Calculer le déterminant et l'inverse de $A_5 =$ `A([2,3,4,5,6])`.
   (c) `[P]`Écrire une fonction `B(n)` qui retourne la matrice $A(\alpha)$ de taille n avec α la suite constante égale à 2.
   (d) `[P]`Calculer le déterminant de `B(n)` pour $n \in [1, 10]$.
2) On note $\mathit{\Delta}_n = \det A((\alpha_k)_{k\in[\![1,n]\!]})$
   (a) On suppose : $\forall\, n : \alpha_n > 2$. Montrer que $\forall\, n : \mathit{\Delta}_n \geqslant n+1$.
   (b) Touver une relation de récurrence vérifiée par $(\mathit{\Delta}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
   (c) Calculer $\mathit{\Delta}_n$ si α est la suite constante égale à 2.
   (d) Calculer $\mathit{\Delta}_n$ si α est la suite constante égale à $\mu > 2$. Indice : on posera $\mu = 2ch^2(\theta)$ avec $\theta > 0$.

Exercice II.5:

Soient $n \in \mathbb{N}$ supérieur à 2, $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice diagonale $\operatorname{diag}(1, \omega, ..., \omega^{n-1})$, $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $q_{i,i+1} = 1$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$ et $q_{n,1} = 1$, les autres termes étant nuls.

1) `[P]`Programmer des fonctions qui renvoient P et Q.
2) `[P]`Calculer, avec $n = 6$, le polynôme caractéristique de Q et le factoriser.
3) Même question dans le cas général.
4) `[P]`Calculer, avec $n = 3$ ou 4, les matrices P^pQ^q pour $(p,q) \in [\![0, n-1]\!]^2$.
5) Dans le cas général, montrer que $(P^pQ^q)_{0\leq p,q\leq n-1}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice II.6:

Soient $n \geq 3$ et M_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $m_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{si } i=j \\ 1 & \text{si } |i-j|=1 \\ -1 & \text{si } (i,j)\in\{(1,n),(n,1)\} \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

1) `[P]`Déterminer les valeurs propres de M_n pour $n \in \{3, 4, 6\}$.
2) Montrer que 0 est valeur propre de M_n.
3) Pour quels n le réel 4 est-il valeur propre de M_n ?
4) Soient $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0, 4\}$, $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\forall m \in \mathbb{N}$, $x_{m+2} = (2-\lambda)x_{m+1} - x_m$. Exprimer x_m à l'aide de m, x_0 et x_1. Quand a-t-on $(x_0, x_1) = (x_m, x_{m+1})$?
5) Déterminer les valeurs propres de M_n.
6) La matrice M_n est-elle positive ? Définie positive ?
7) Soit $x \in \mathbb{R}$. La suite $(x^kM_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice II.7:

Pour $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B\in\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, on définit $A\otimes B=\begin{pmatrix}a_{1,1}B & \cdots & a_{1,n}B\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n,1}B & \cdots & a_{n,n}B\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{np}(\mathbb{C})$.

1) `[P]` Soit $A=\begin{pmatrix}1&4\\2&1\end{pmatrix}$. Définir une fonction `Aotimes(B)` qui retourne $A\otimes B$.
   Calculer $A\otimes B$ pour $B=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ puis pour $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.
   Les matrices obtenues sont-elles diagonalisables ?
2) Montrer que $\otimes$ est bilinéaire. Calculer $\mathrm{Tr}(A\otimes B)$.
3) Montrer que pour tout $(A,A',B,B')\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2\times\mathcal{M}_p(\mathbb{C})^2$, $(A\otimes B)(A'\otimes B')=(AA')\otimes(BB')$.
   Qu'en déduire sur $A\otimes B$ si A et B sont inversibles ?
4) On suppose A semblable à A' et B semblable à B'. Que dire de $A\otimes B$ et $A'\otimes B'$?
5) Quel est le rang de $A\otimes B$?
6) On suppose A et B diagonalisables. Montrer que $A\otimes B$ aussi.
7) Réciproquement on suppose $A\otimes B$ diagonalisable avec A et B non nulles.
   (a) Montrer que B n'est pas nilpotente.
   (b) On suppose A triangulaire : montrer que B est diagonalisable.
   (c) Conclure dans le cas général.
   (d) Le résultat est-il le même si on se place dans $\mathbb{R}$?

Algèbre bilinéaire

Exercice II.8:

Soit $p\in\mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})=\{M\in\mathcal{S}_p(\mathbb{R})\mid \mathrm{sp}(M)\subset\mathbb{R}_+\}$ et $\mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})=\{M\in\mathcal{S}_p(\mathbb{R})\mid \mathrm{sp}(M)\subset\mathbb{R}_+^*\}$.

1) Montrer que $M\in\mathcal{S}_p^+(\mathbb{R}) \iff \forall X\in\mathbb{R}^n, {}^tXMX\geq 0$.
   Comment s'adapte cette caractérisation pour $\mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$?
2) Soit $a>0$. On définit les suites (a_n) et (b_n) par $\begin{cases}a_0=a\\ b_0=1\end{cases}$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $\begin{cases}a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{b_n}\right)\\ b_n=\dfrac{1}{2}\left(b_n+\dfrac{1}{a_n}\right)\end{cases}$
   Montrer que ces suites sont bien définies et qu'elles convergent vers des limites à préciser (on pourra considérer a_n/b_n).
3) Montrer que $\mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ est stable par inverse.
   Pour A,B dans $\mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$, montrer que $\dfrac{A+B^{-1}}{2}$ et $\dfrac{B+A^{-1}}{2}$ y sont aussi.
4) `[P]` Soit $A\in\mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$. On définit les suites récurrentes de matrices (A_n) et (B_n) comme plus haut, avec $A_0=A$ et $B_0=I_p$. Ecrire un programme qui renvoie A_n et B_n.
   Tester en dimension 5 avec $A=(\min\{i,j\})_{1\leq i,j\leq 5}$ dont on vérifiera informatiquement qu'elle est bien dans $\mathcal{S}_5^{++}(\mathbb{R})$.
   Conjecturer le comportement de A_n, B_n, A_nB_n, A_n^2.

Exercice II.9:

1) Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $P_n\in\mathbb{R}[X]$ tel que $\forall t\in\mathbb{R}$, $\sin(nt)=P_n(\cos t)\sin t$.
2) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $P_{n+2}=2XP_{n+1}-P_n$.
3) `[P]` Ecrire une fonction permettant de calculer P_n.
4) Montrer que l'application $(P,Q)\mapsto\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
   Montrer que (P_n) est orthogonale pour ce produit scalaire.

Arithmétique

1) On définit la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$F_0 = 0 \qquad F_1 = 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ on note E_k l'équation suivante, à inconnues dans $\mathbb{Z}$:

$$x^2 + y^2 + 1 = kxy$$

Soit S_k son ensemble de solutions, et $S_{k+} = S_k \cap (\mathbb{N}^*)^2$.

- `[P]` Afficher les 20 premiers termes de la suite (F_n). Pour $k \in [\![1, 10]\!]$, déterminer l'ensemble des solutions (x, y) de S_k avec x et y dans $[\![1, 100]\!]$. Que conjecturez-vous ?
- Soit k tel que S_k soit non vide. Montrer que S_{k+} l'est aussi. Montrer que si $k \neq 3$, un couple (x, y) de S_k vérifie forcément $x \neq y$.
- Soit $(x, y) \in S_{k+}$ avec $x > y$: montrer que $(ky - x, y) \in S_{k+}$ et que $0 < ky - x < x$
- Si $k \neq 3$, en déduire une contradiction et conclure quant à la première conjecture.
- On considère maintenant le cas $k = 3$. Montrer par récurrence sur n le résultat suivant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \{(x, y) \in S_{3+}, x + y \leq n\} \subset \{(1, 1)\} \cup \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} \{(F_{2p-1}, F_{2p+1}), (F_{2p+1}, F_{2p-1})\}$$

2) Questions bonus :

- Commenter la complexité de l'algorithme de calcul récursif pour la suite de Fibonacci. Donner un algorithme de complexité linéaire, puis logarithmique.
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^{n+1}$
- Que dire de la série entière $\sum F_n z^n$?
- Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_k$ pour $n \in \mathbb{N}$

Exercice II.10:

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On définit la suite (F_n) de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1) Montrer que cette suite est périodique.
2) `[P]` Déterminer la plus petite période lorsque $m = 2$ puis $m = 5$. Peut-on en déduire la plus petite période lorsque $m = 10$?
3) `[P]` Résoudre $x^2 = x + 1$ dans $\mathbb{Z}/41\mathbb{Z}$. En déduire l'expression de F_n en fonction de n pour $m = 41$.
4) On prend p un nombre premier impair. Montrer qu'il existe $u \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $x^2 = x + 1 \iff (x - u)^2 = u^2 + 1$. En déduire que l'équation $x^2 + x + 1$ admet une solution dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si et seulement si 5 est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exercice II.11:

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\pi(n)$ le nombre d'entiers premiers entre 1 et n.

1) `[P]` Écrire une fonction `isPrime(n)` qui détermine si n est premier. (*j'en ai écrit une en $O(\sqrt{n})$, il n'a pas fait de remarque sur la complexité mais je pense qu'en écrire une en $O(n)$ empêche de faire des questions après*)
2) `[P]` Écrire une fonction `piPrime(n)` qui renvoie $\pi(n)$
3) `[P]` Calculer $\dfrac{n}{\pi(n)}$ pour $n = 10^1, ..., 10^6$. Faire une conjecture sur le comportement asymptotique de $\dfrac{n}{\pi(n)}$.
4) On donne la majoration $\pi(n) \leq \dfrac{6\ln(2)n}{\ln(n)}$, et on note $(*)_k$ l'équation $\dfrac{n}{\pi(n)} = k$ pour $k \in \mathbb{Q}$.

   (a) Démontrer la conjecture $\dfrac{n}{\pi(n)} \to \infty$.

(b) Montrer que les solutions de l'équation $(*)_k$ sont bornées par 2^{6k}.

(c) `[P]`Montrer que l'équation $(*)_k$ pour $k = \dfrac{21}{10}$ n'a pas de solutions.

(d) Soit k entier, posons $E_k = \{n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{n}{\pi(n)} \leq k\}$. Montrer que cet ensemble est fini puis que son maximum est solution de l'équation $(*)_k$.

(e) `[P]`A l'aide, déterminer les solutions pour $k = 2$ et $k = 3$.

5) (a) Montrer que $\pi(2n) \leq n$.

(b) Soit p premier tel que $n < p < 2n$. Montrer que p divise $\dbinom{2n}{n}$.

(c) Montrer que $n^{\pi(2n)-\pi(n)} \leq \dbinom{2n}{n} \leq 2^{2n}$

(d) Montrer que $\pi(2^{k+1}) \leq 2^k$ et que $\pi(2^{k+1}) \leq \pi(2^k) + \dfrac{2^{k+1}}{k}$.

(e) *Je n'ai pas eu le temps de traiter la dernière sous question, mais on doit pouvoir la retrouver comme conclusion de l'exercice.*

Exercice II.12:

On note φ l'indicatrice d'Euler, et on définit trois matrices G_n, A_n, F_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par : $g_{i,j} = i \wedge j$, $a_{i,j} = 1$ si $i|j$ et 0 sinon, $f_{i,j} = \varphi(i)$ si $i = j$ et 0 sinon.

On note D_n l'ensemble des diviseurs de n.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f : [\![1, n]\!] \to D_n$ définie par $f(k) = k \wedge n$.
Montrer que tout $d \in D_n$ admet exactement $\varphi(n/d)$ antécédents par f.
En déduire que $\displaystyle\sum_{d \in D_n} \varphi(d) = n$.

2) `[P]`Définir des fonctions renvoyant G_n, A_n, F_n, et vérifier que $G_n = {}^tA_nF_nA_n$ sur des exemples.

3) Démontrer l'égalité précédente et en déduire $\det(G_n)$.

4) Déterminer une matrice B_n triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs telle que $G_n = {}^tB_nB_n$. Qu'en conclure ?

Exercice II.13:

On donne le code en Python suivant :

```python
def f(n):
    p,c=2,0
    L=[]
    while n>1:
        if n%p==0:
            if c==0:
                c+=1
                L.append(p)
                n//=p
            else:
                n//=p
        else:
            p+=1
            c=0
    return L
```

1) Que fait cette fonction ?

2) Pour $Q \in \mathbb{Z}[X]$ non constant on dit que $p \in \mathbb{Z}$ divise Q s'il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $p|Q(a)$. Si p est premier, on dit que p est un diviseur premier de Q, et on note $\mathcal{P}_Q$ l'ensemble de ces entiers. Justifier que $\mathcal{P}_Q$ est non vide. Que dire si $Q(0) = q_0 = 0$?

3) Dans la suite on suppose $q_0 \neq 0$. Soit $p \in \mathcal{P}_Q$: montrer que $\{a \in \mathbb{Z}, p|Q(a)\}$ est infini. Indication : on pourra considérer les $Q(a + kp)$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

4) Dans cette question $Q = X^2 - 7n + 1$.
   (a) `[P]`Ecrire une fonction qui prend en argument $a \in \mathbb{Z}$ et renvoie la liste des diviseurs premiers des $\{Q(x), x \in [\![-a, a]\!]\}$. Indication : l'instruction `x in L` renvoie un booléen indiquant l'appartenance de `x` à la liste `L` (pour éviter les doublons), et `L.sort()` trie la liste en place.
   (b) `[P]`Donner la longueur des listes obtenues pour $a \in \{10k, k \in [\![1, 20]\!]\}$. Que peut-on supposer ?
5) On suppose que $\mathcal{P}_Q = \{p_1, ..., p_n\}$ est fini. Soit $m = \prod_{i=1}^{r} p_i$. Montrer qu'on dispose de $R \in \mathbb{Z}[X]$ non constant tel que $Q(q_0 mX) = q_0(1 + mR(X))$. En considérant un diviseur premier de $1 + mR(X)$, obtenir une contradiction.
6) A l'aide de $Q = 4X^2 + 1$, montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 4.

Exercice II.14:

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère un sous-ensemble A de $I_N = [\![1, N]\!]$, décrit par une liste `L` de booléens telle que `L[i]` prenne la valeur `True` si et seulement si $i \in A$.

1) (a) `[P]`Ecrire une fonction qui prend en argument N et deux listes `L1` et `L2` correspondant à deux parties A_1 et A_2 de I_N, et renvoie une liste `S` des éléments de I_N qui s'écrivent comme somme d'un élément de A_1 et d'un élément de A_2.
   (b) `[P]`En déduire une fonction qui affiche les entiers de $[\![1, N]\!]$ qui sont somme de 2, puis 3, puis 4 carrés d'entiers. Tester avec $N = 100$.
2) Soient $(w, x, y, z, w', x', y', z')$ des entiers. On vérifie facilement que $(w^2+x^2+y^2+z^2)\cdot(w'^2+x'^2+y'^2+z'^2) = (ww' + xx' + yy' + zz')^2 + (wx' - xw' + yz' - zy')^2 + (wy' - yw' + xz' - zx')^2 + (wz' - zw' + xy' - yx')^2$
   En déduire qu'il suffit de montrer la propriété pour les nombres premiers impairs.
3) On admet la propriété suivante : pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ avec b impair, il existe $a' \in \mathbb{Z}$ tel que $|a'| < b/2$ et $a \equiv a'$ $[b]$.
   Soit p un nombre premier impair. Montrer que les classes d'équivalence des $1 + x^2$ pour $x \in [\![0, (p-1)/2]\!]$ sont distinctes.
4) En déduire l'existence de $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $1 + x^2 + y^2 \equiv 0$ $[p]$.
5) Soit $m = \inf\{k \in \mathbb{N}^* \mid kp$ s'écrit comme somme de 4 carrés$\}$. On a vu plus haut que $m < p$ (penser à $a^2 + b^2 + 1^2 + 0^2$), montrer maintenant que $m = 1$ en supposant par l'absurde $m > 1$.

Exercice II.15:

Soit p un nombre premier, $S_p = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{k(p-k)}$. On écrit $\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} = \frac{a_p}{b_p}$ avec a_p et b_p deux entiers naturels premiers entre eux. La classe de $x \in \mathbb{Z}$ modulo p est notée $\bar{x}$.

1) `[P]`Calculer les 20 premiers termes des suites (S_p/p) et (a_p/p^2).
2) Montrer que $\bar{S_p} = \sum_{x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*} x^{-2} = \sum_{x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*} x^2$.
3) Montrer que pour $p \geq 3$, $p | S_p$.
4) Montrer que pour $p \geq 5$, $p^2 | S_p$.

Polynômes

Exercice II.16:

On considère l'espace $E = \mathscr{C}^\infty([a, b], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et de la distance d_∞ associée.

1) Soit $f \in E$, déterminer la limite de $d_\infty(f, \mathbb{R}_n[X])$..
2) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(x_k)_{k \in [\![0, n]\!]}$ des réels distincts de $[a, b]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(x_k) = f(x_k)$. Décrire ensuite l'ensemble des polynômes solutions.

3) Soit a un réel non nul. On considère $F_a : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{x^2+a^2}$.

   (a) `[P]` Ecrire une fonction prenant en arguments a et x et renvoyant $F_a(x)$. Afficher le graphe de F_4 sur $[-1,1]$.

   (b) `[P]` Pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [\![0, m-1]\!]$ on définit $x_{k,m} = \dfrac{2k+1}{2m}$.
   Ecrire une fonction prenant en arguments a et m, et renvoyant le polynôme d'interpolation $P_{a,m}$ associé aux contraintes $P(x_{k,m}) = F(x_{k,m})$ et $P(-x_{k,m}) = -F(x_{k,m})$. On pourra utiliser le module `scipy.interpolate` et la fonction `lagrange(x,y)`.
   Afficher sur un même graphe les courbes de F_a et de $P_{a,m}$ dans l'intervalle $[-1,1]$ pour $a=4$ et $m \in \{1,3,5,10,20\}$. Commenter.

4) On pose $U_m(X) = \displaystyle\prod_{k=0}^{m-1} (X^2 - x_{k,m}^2)$.

   (a) Montrer que $degP_{a,m} \leq 2m-2$.

   (b) Montrer que $F_a(X) - P_{a,m} = F_a(X)\dfrac{U_m(X)}{U_m(a)}$.

Exercice II.17:

1) (a) `[P]` Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![0,n]\!]$ on définit $L_{n,i}(X) = \displaystyle\prod_{k\in[\![0,n]\!]\setminus\{i\}} \frac{X-k}{i-k}$.
   Ecrire une fonction `L(n,i,x)` renvoyant $L_{n,i}(x)$.

   (b) `[P]` On définit $\forall a = (a_0, ..., a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$, $P_a(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i L_{n,i}(X)$.
   Ecrire une fonction `P(a,x)` renvoyant $P_a(x)$.

   (c) `[P]` Ecrire une fonction permettant le tracé sur un graphe des points (k, a_k) et de la courbe de P_a.

2) On définit alors $A_{n+1} = \{(a_0, ..., a_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid P_a \in \mathbb{Z}_n[X]\}$, l'objectif étant de caractériser cet ensemble.
   On pose $T_n = (t_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$ où $t_{i,j} = \dbinom{j}{i}$ si $i \leq j$, 0 sinon.
   On pose $\forall j \in [\![0,n]\!]$, $H_j(X) = \displaystyle\prod_{k=0}^{j-1} (X-k)$.

   (a) Déterminer $U_n = T_n^{-1}$.

   (b) Déterminer la matrice de passage B_n de $(L_{n,i})_{i\in[\![0,n]\!]}$ vers $(H_j)_{j\in[\![0,n]\!]}$ (toutes deux des bases de $\mathbb{R}_n[X]$).

   (c) Détrminer Δ_n matrice diagonale telle que $B_n = {}^tT_n\Delta_n$.

   (d) Soit $C_n = B_n^{-1}$. Montrer que $c_{i,j} = \dfrac{(-1)^j}{j!(i-j)!}$ si $i \geq j$, 0 sinon.

3) A tout $a \in \mathbb{Z}^{n+1}$ on associe $b \in \mathbb{R}^{n+1}$ avec $b_j = \displaystyle\sum_{i=0}^{j} c_{i,j} a_i$.

   (a) Montrer que $a \in A_{n+1} \iff b \in \mathbb{Z}^{n+1}$.

   (b) `[P]` Ecrire une fonction `b(a)` qui renvoie le vecteur b défini précédemment.

4) *Une suite ?*

Exercice II.18:

Pour $n \in \mathbb{N}$ et p premier, on pose $R_{n,p} = X^n + X^{n-1} + ... + X^2 + X + p$.

1) (a) `[P]` Ecrire un programme qui prend en paramètres les entiers n et p et renvoie la liste des parties réelles et imaginaires des racines de $R_{n,p}$. On pourra utiliser la fonction `roots` du module `numpy`.

(b) [P] Ecrire un programme qui prend en paramètres les entiers n et p et trace les racines de $R_{n,p}$ ainsi que le cercle unité. Que conjecture-t-on ?

2) On définit en outre $Q_{n,p} = pX^n + X^{n-1} + X^{n-2} + ... + X + 1$ et $F_{n,p} = (1-X)Q_{n,p}$.

(a) Montrer que toutes les racines de $F_{n,p}$ sont dans le disque fermé de centre 0 et de rayon 1.

(b) Montrer que toutes les racines de $Q_{n,p}$ sont dans le disque ouvert associé.

(c) Montrer qu'il n'existe pas $A, B \in \mathbb{Z}[X]$ non constants tels que $R_{n,p} = AB$.

Exercice II.19:

Soient $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $a < b$ dans $\mathbb{R}$.

Soient f_1, f_2, f_3 les trois applications $\mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}$ qui évaluent un polynôme respectivement en a, b et $\dfrac{a+b}{2}$.

1) Montrer que (f_1, f_2, f_3) est libre.

2) [P] Soient $\phi : P \in E \mapsto \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b P(t)dt$, $A = \begin{pmatrix} f_1(1) & f_2(1) & f_3(1) \\ f_1(X) & f_2(X) & f_3(X) \\ f_1(X^2) & f_2(X^2) & f_3(X^2) \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \phi(1) \\ \phi(X) \\ \phi(X^2) \end{pmatrix}$.

On prend $a = -1$, $b = 3$. Calculer A et B. Vérifier que A est inversible. Calculer $C = A^{-1}B$.
De même pour $a = 0$ et $b = 5$.

3) Faire une conjecture sur C. La démontrer.

4) Trouver une relation entre ϕ, f_1, f_2, f_3.

5) Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$, soient α, β et γ les coefficients trouvés en 4).
Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\left| \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b P - \alpha P(a) - \beta P(b) - \gamma P\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \right| = M(b-a)^4$.

Exercice II.20:

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$

1) Montrer que P_n n'a pas de racines dans $\mathbb{R}_+$.

2) [P] Représenter les racines de P_n dans $\mathbb{C}$ pour $n \in [\![2, 7]\!]$

3) Montrer que les racines complexes de P_n sont simples

4) Si n est pair, montrer que P_n n'admet pas de racine réelle.
Si n est impair, montrer que P_n en admet une seule dans $\mathbb{R}_-$, notée r_n. Etudier la suite $(r_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$.

5) Etudier la convexité de P_n.

Exercice II.21:

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des polynômes réels à coefficients dans $\{0, 1\}$.

1) Soient P et Q dans $\mathcal{A}$. Montrer que $P = Q \iff P(-2) = Q(-2)$.

2) [P] Soit $N \in \mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{A}$ tel que $N = P(-2)$. Ecrire une fonction de variable d'entrée N renvoyant P. Application avec $N = 2015$.

Exercice II.22:

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré ≥ 2. On note $P_n = \underbrace{P \circ ... \circ P}_{n \text{ fois}}$. On pose $J_P = \{z \in \mathbb{C} \mid (P_n(z))_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée}\}$.

1) Montrer que P admet au moins un point fixe. Que peut-on en déduire pour J_P ?

2) (a) Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| \geq R \implies |P(z)| \geq 2|z|$.

(b) Montrer que $z \in J_P \iff \forall n \in \mathbb{N}, |P_n(z)| \leq R$.

(c) En déduire que J_P est compact.

3) On pose ici $P = X^4 + X$.

(a) Déterminer un R convenable dans ce cas particulier.

(b) `[P]` Ecrire une fonction qui prend comme arguments $z \in \mathbb{C}$ et $N \in \mathbb{N}$ et renvoie $k \in [\![0, N]\!]$ tel que $|P_k(z)| > R$ s'il existe, et $N + 1$ sinon.

(c) `[P]` Tracer une approximation de J_P.

Exercice II.23:

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $E_n = [\![0, n-1]\!]$ et S_n le groupe des permutations de E_n. En PYTHON, une permutation $\sigma \in S_n$ est représentée par la liste $[\sigma(0), \sigma(1), ..., \sigma(n-1)]$.

Si $i \in E_n$, la période de i pour σ est le plus petit entier p tel que $\sigma^p(i) = i$. On note $p = \mathrm{Per}(\sigma, i)$.

1) Justifier l'existence de $\mathrm{Per}(\sigma, i)$ et montrer qu'elle est $\leq n$. Exprimer l'ordre de σ dans S_n en fonction des $\mathrm{Per}(\sigma, i)$.
2) `[P]` Ecrire une fonction qui retourne l'ordre d'un élément i pour une permutation σ.
3) `[P]` Ecrire une fonction qui retourne la liste des périodes des éléments de E_n pour une permutation σ. Tester cette fonction avec $\sigma = [3, 6, 7, 0, 2, 1, 8, 5, 4, 9] \in E_10$.
4) Soit $\sigma \in S_n$. On définit une relation R_σ sur E_n par $xR_\sigma y \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ y = \sigma^k(x)$.
   Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. On appelle "orbite de x pour σ" la classe d'équivalence de x pour R_σ, et on la note $\Omega_\sigma(x)$.
5) Montrer que si $x \in E_n$, $\Omega_\sigma(x) = \{x, \sigma(x), ..., \sigma^{p-1}(x)\}$ où $p = \mathrm{Per}(\sigma, i)$.
6) `[P]` Ecrire une fonction qui retourne la liste des orbites d'une permutation σ.

Probabilités

Variables aléatoires

Exercice III.1:

1) `[P]` Ecrire une fonction qui à une permutation (représentée par une liste) associe son nombre de points fixes.
2) `[P]` Ecrire une fonction qui à un entier n associe la moyenne sur tous les éléments de $\mathfrak{S}_n$ du nombre de points fixes. Que remarque-t-on ? Le démontrer.
3) Pour $k \in \mathbb{N}$ on note D_k le nombre d'éléments de $\mathfrak{S}_k$ sans points fixes. Montrer que
$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$$
4) En déduire que
$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$
5) Montrer que D_n est l'entier le plus proche de $n!e^{-1}$.

Exercice III.2:

Au rez-de-chaussée d'un immeuble à n étages, k personnes montent dans l'ascenseur et descendent à un étage au hasard de façon indépendante. On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'arrêts de l'ascenseur.

1) `[P]` Ecrire une fonction qui simule la variable aléatoire X.
2) On note X_i ($i \in [\![1, n]\!]$) la variable aléatoire qui vaut 1 si l'ascenseur s'arrête à l'étage i, 0 sinon.

(a) Donner la loi des X_i.
(b) Donner l'expression de X en fonction des X_i.
(c) En déduire $\mathbb{E}(X)$.
(d) `[P]` Pour n variant de 3 à 20 et avec $k = 10$, vérifier informatiquement le résultat sur 1000 répétitions de l'expérience.

Exercice III.3:

On note $\mathbb{H} = \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$. Soient X et Y deux variables aléatoires telles que l'on ait $\forall(p, q) \in \mathbb{H}^2$, $\mathbb{P}(X = p, Y = q) = \dfrac{\alpha}{p^q}$.

1) (a) Donner la loi marginale de X.
   (b) Calculer $r_n = \displaystyle\sum_{p=2}^{n} \mathbb{P}(X = p)$.
   (c) En déduire la valeur de α.
   (d) X admet-elle une espérance ?
   (e) `[P]` Donner une approximation décimale correcte de $\mathbb{P}(X = Y)$.
2) (a) `[P]` Programmer et tester une fonction `f(x)` qui à $x \in]0, 1[$ associe l'unique entier n tel que $r_{n-1} \leq x < r_n$.
   (b) `[P]` On définit $S_{p,q} = \displaystyle\sum_{i=2}^{q} \frac{1}{p^i}$. Programmer et tester une fonction `g(y)` qui, étant donné $y \in \mathbb{R}$ et $p = f(y)$, renvoie l'entier $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $S_{p,q-1} \leq y - r_{p-1} < S_{p,q}$.
3) Proposer une procédure informatique permettant de simuler les variables aléatoires X et Y. On donne la fonction `random()` qui renvoie un réel choisi uniformément dans $[0, 1[$.

Exercice III.4:

Dans le cadre d'un jeu regroupant n joueurs $J_1, ..., J_n$, on effectue N lancers de pile ou face avec une pièce équilibrée. Chaque joueur fait des prédictions sur le résultat des lancers (par exemple PFP pour $N = 3$). Le nombre de prédictions justes est donné pour chaque joueur par les variables aléatoires $X_1, ..., X_n$. Les gagnants sont les joueurs ayant réalisé le plus de prédictions justes : ils se partagent alors la somme S. Les gains de chaque joueur sont donnés par les variables aléatoires $G_1, ..., G_n$.

1) On suppose que les $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ sont indépendantes et suivent la même loi.
   (a) Justifier que les $(G_i)_{1\leq i\leq n}$ suivent la même loi, que l'on ne demande pas d'exprimer.
   (b) Montrer que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{E}(G_i) = \dfrac{S}{n}$.
2) `[P]` Ecrire une fonction prenant n, N et S en arguments, qui simule une partie et renvoie le gain de chaque joueur. Calculer le gain moyen sur un grand nombre de parties.
3) J_1 et J_2 suivent maintenant une stratégie différente : ils font des prédictions opposées (exemple : PFP et FPF pour $N = 3$). Les autres joueurs ne changent pas de stratégie.
   On suppose la mutuelle indépendance de $X_1, X_3, ..., X_n$ ainsi que celle de $X_2, X_3, ..., X_n$. On note $G' = G_1 + G_2$ et $Y = \max\{X_1, X_2\}$.
   (a) Montrer que les X_i suivent la même loi, que l'on précisera. On note alors $q_k = \mathbb{P}(X_i = k)$ et $r_k = \mathbb{P}(X_i \leq k)$.
   (b) On suppose dans toute la suite de la question 3) N impair, avec $N = 2p + 1$. Trouver le domaine V des valeurs prises par Y.
   (c) Soient $k \in V$ et $j \in [\![1, n - 1]\!]$. Exprimer $\mathbb{P}(G' = S/j, Y = k)$ en fonction de q_k et r_{k-1}.
   (d) Calculer $\mathbb{E}(G')$ puis $\mathbb{E}(G_1)$ et $\mathbb{E}(G_2)$. La stratégie adoptée par J_1 et J_2 est-elle efficace ?
4) On suppose maintenant N pair : la stratégie est-elle efficace ?
5) `[P]` Reprendre la question 2) avec cette nouvelle stratégie. On pourra utiliser la fonction `factorial`.

Exercice III.5:

Soient n régions du plan, que l'on colorie avec $m > n$ crayons de couleurs différentes, de manière aléatoire.

1) Quelle est la probabilité d'avoir au moins trois régions de même couleur ? Trois régions de couleurs différentes ?
2) Calculer la probabilité $P_{n,p}(k)$ d'avoir k couleurs différentes dans les cas $k = 1, 2, n$.
3) Soit $S_{n,k}$ le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments vers un ensemble à k éléments.
   (a) Trouver un réel $a(n,k)$ tel que $S_{n,k} = a(n,k)(S_{n-1,k} + S_{n-1,k-1})$.
   (b) `[P]`Ecrire une fonction qui renvoie $S_{n,k}$: la tester pour $n = 3$ et $k = 2$.
   (c) Lien entre $S_{n,k}$ et $P_{n,p}(k)$?

Exercice III.6:

1) (a) `[P]`Ecrire une fonction `S(n,p)` qui simule une variable aléatoire $S_n = Y/n$ où $Y \sim \mathcal{B}(n,p)$.
   (b) `[P]`Ecrire une fonction `test(n,p)` interpolant les points (k, S_k) puis $\left(k, p + \sqrt{\dfrac{\ln k}{k}}\right)$ et $\left(k, p - \sqrt{\dfrac{\ln k}{k}}\right)$.
   Que remarque-t-on ?
2) (a) Pour t réel et $x \in [-1,1]$, montrer que $\mathrm{e}^{tx} \leq \dfrac{1-x}{2}\mathrm{e}^{-t} + \dfrac{1+x}{2}\mathrm{e}^{t}$
   (b) Soit X une variable aléatoire centrée telle que $|X| \geq 1$.
   Montrer que pour tout t, la variable e^{tX} est d'expérance finie, et que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX}) \leq \mathrm{ch}(t) \leq \exp(t^2/2)$
3) Soient $(X_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes centrées et bornées. On note $c_i = \|X_i\|_\infty$ et $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$
   (a) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que
   $$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tS_n}) \leq \exp\left[\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i^2\right]$$
   (b) Montrer que pour tout $\alpha > 0$,
   $$\mathbb{P}(S_n > \alpha) \leq \exp\left[-t\alpha + \frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i^2\right]$$
   (c) En déduire que
   $$\mathbb{P}(S_n > \alpha) \leq \exp\left[-\frac{\alpha^2}{2\sum_{i=1}^{n} c_i^2}\right]$$
   Puis que
   $$\mathbb{P}(|S_n| > \alpha) \leq 2\exp\left[-\frac{\alpha^2}{2\sum_{i=1}^{n} c_i^2}\right]$$
   (d) Commenter le résultat observé à la première question.

Séries génératrices

Exercice III.7:

On considère un pion qui se déplace sur une demi-droite. Le i-ème pas est donné par une variable Y_i à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Le pion est initialement à la case 0 et on suppose que les Y_i suivent la même loi et sont indépendantes entre elles. On pose alors $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$ qui représente la position du pion après $n \in \mathbb{N}^*$ pas, avec par convention $S_0 = 0$.

On note $f_k = \mathbb{P}(Y_1 = k)$ et $f(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(t)$.

1) Dans cette question, on considère que $Y_i - 1$ suit une loi de Bernouilli de paramètre p.

   (a) `[P]` Ecrire une fonction qui pour k et p donnés itère l'avancement jusqu'à atteindre ou dépasser la k-ième case. Elle renvoie 1 si le pion arrive exactement sur cette case et 0 sinon.

   (b) `[P]` Pour une centaine d'essais avec une valeur de k assez grande et des valeurs de p de votre choix, calculer le rapport entre le nombre de fois où le pion arrive sur la k-ième case et le nombre total d'essais. Comparer à $1/\mathbb{E}(Y_i)$.

2) On revient au cas général. On pose $E_k = \bigcup_{n=0}^{+\infty} [S_n = k]$ et $u_k = \mathbb{P}(E_k)$.

   (a) Pour $j \in [\![1, k]\!]$, montrer que $\mathbb{P}(E_k \cap [Y_1 = j]) = f_j u_{k-j}$.

   (b) En déduire que $u_k = u_0 f_k + u_1 f_{k-1} + \ldots + u_{k-1} f_1$.

3) On pose $u(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k t^k$.

   Après avoir justifié que u est bien définie sur $]-1, 1[$, montrer que $u = \dfrac{1}{1-f}$.

4) Donner l'expression de u et des u_k en fonction de k, ainsi que de $\lim_{k\to\infty} u_k$ pour les cas suivants :

   (a) les Y_i suivent la loi géométrique de paramètre p

   (b) les $Y_i - 1$ suivent la loi de Bernouilli de paramètre p

   Que peut-on dire par rapport à $\mathbb{E}(Y_i)$?

Exercice III.8:

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilité, X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de X, et N une variable aléatoire indépendante des X_n et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On définit $S : \omega \in \Omega \mapsto \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega)$.

1) Justifier que S est une variable aléatoire.

2) Soient $\mathcal{G}_X$, $\mathcal{G}_S$, $\mathcal{G}_N$ les séries génératrices respectives de X, S, N.
   Montrer que $\forall t \in [0, 1]$, $\mathcal{G}_S(t) = \mathcal{G}_N \circ \mathcal{G}_X(t)$.

3) (a) On suppose que X et N possèdent une espérance. Montrer que S possède une espérance et calculer $\mathbb{E}(S)$.

   (b) On suppose que X et N possèdent un moment d'ordre 2. Montrer que S possède un moment d'ordre 2 et calculer $\mathbb{E}(S^2)$.

4) On étudie la transmission du nom de famille au cours des générations dans une société patriarcale. On suppose que le nombre de descendants masculins d'un individu suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in]0, +\infty[$. On note Z_0 le nombre d'individus masculins au début de l'étude, Z_n le nombre de descendants à la n-ème génération. On suppose $Z_0 = 1$.

   (a) `[P]` Ecrire une fonction renvoyant le nombre de descendants masculins à la n-ème génération.

   (b) On fixe λ et n. Calculer une moyenne, sur un grand nombre de mesures, de ce nombre. Comparer à $\mathbb{E}(Z_n)$.

Exercice III.9:

Pour n et m dans $\mathbb{N}^*$, on note $s_{m,n}$ le nombre de surjections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, m]\!]$.

On définit $S_m : z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s_{m,n}}{n!} z^n$.

1) Que vaut $s_{m,n}$ si $n < m$? Trouver un majorant simple de $s_{m,n}$ dans le cas général et en déduire que le rayon de convergence de S_m est $+\infty$.

2) Montrer que pour tout $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2*$, $s_{m+1,n} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} s_{m,n-k}$.

3) En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $m \in \mathbb{N}^*$, $S_m(z) = (\mathrm{e}^z - 1)^m$.

4) `[P]` Ecrire une procédure pour calculer $s_{m,n}$. Calculer $s_{50,20}$.

Exercice III.10:

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note a_n le nombre de façons de subdiviser un polygone convexe à $(n+2)$ côtés en triangles, en reliant des sommets par des segments qui ne se coupent pas. On pose $a_0 = 1$.

1) Calculer a_3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$.

2) `[P]` Calculer a_n pour $n \in [\![1, 20]\!]$, puis a_{n+1}/a_n.

3) En étudiant la série entière $\sum a_n x^n$, trouver une expression de a_n à l'aide d'un coeffcient binomial.

Exercice III.11:

On note $I_n = \mathrm{card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma \circ \sigma = \mathrm{id}\}$.

1) Calculer I_1, I_2, I_3.

2) `[P]` Ecrire une fonction qui calcule I_n.

3) Pour $n \in [\![3, 9]\!]$, calculer $I_n - I_{n-1} - (n-1)I_{n-2}$.

4) Conjecturer et prouver une relation.

5) Montrer que la série entière $S : x \mapsto \displaystyle\sum \frac{I_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence ≥ 1.

6) Trouver une relation entre $S'(x)$ et $(x+1)S(x)$.

7) En déduire une expression de I_n.

Exercice III.12:

Pour q, n, p des entiers on pose $B_q(n,p) = \mathrm{card}\left\{(a_1, ..., a_p) \in [\![1, q]\!]^p \,\middle|\, sum_{i=1}^{p} a_i = n\right\}$.

1) Que vaut $B_q(n,p)$ quand $n > pq$?

2) (a) On pose $C = 1 + X + ... + X^p$. Montrer que $C^p = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} B_q(n,p) X^p$.

   (b) En déduire $B_q(n, p+1)$ en fonction des $B_q(j,p)$ pour $j \in [\![0, \min(n,q)]\!]$.

3) `[P]` Ecrire une fonction permettant de calculer $B_q(n,p)$.

4) (a) Rappeler sans démonstration le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^{q+1}}$.

   En déduire $B_q(n,p)$ sous forme de somme finie.

   (b) `[P]` En déduire une deuxième fonction permettant de calculer $B_q(n,p)$.

Probas et matrices

Exercice III.13:

On considère $n \geq 2$ joueurs numérotés de 1 à n, participant à un tournoi où chacun affronte tous les autres, sans égalité possible dans une rencontre.

On définit la matrice aléatoire $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ par $\begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \text{ a gagné contre } j \\ 0 & \text{si } j \text{ a gagné contre } i \end{cases}$

1) `[P]` Ecrire une fonction renvoyant une matrice de tournoi aléatoire.

2) `[P]` Calculer les déterminants de telles matrices pour des entiers pairs et impairs. Que constate-t-on ?

3) Démontrer la propriété postulée pour les n impairs.

4) (a) Soit $J_n = (1)_{1\leq i,j\leq n}$. Calculer $\det(J_n - I_n)$.

(b) Soient M et N deux matrices à coefficients entiers telles que $M - N$ ait tous ses coefficients pairs. Montrer que $\det M$ et $\det N$ ont même parité.

(c) Démontrer la propriété postulée pour les n pairs.

Exercice III.14:

Trois joueurs A, B, C se passent un ballon. On note A_n l'évènement "le joueur A a la balle après n passes". On a les probabilités de passes suivantes :

$\mathbb{P}(A \to B) = 1/3, \mathbb{P}(A \to C) = 2/3, \mathbb{P}(B \to A) = 1/3, \mathbb{P}(B \to C) = 2/3, \mathbb{P}(C \to B) = 1/3, \mathbb{P}(C \to C) = 2/3.$

On note $X_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(A_n) \\ \mathbb{P}(B_n) \\ \mathbb{P}(C_n) \end{pmatrix}$

1) Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = MX_n$ pour tout n

2) `[P]` Trouver la limite de (X_n).