Préparation au concours général de mathématiques (Corrigés)

Correction exercice 1 : (2005)

On commence par noter que la fonction $g : x \in [0, \frac{7}{10}] \mapsto f(x+\frac{3}{10}) - f(x)$ est continue, et ne s'annule jamais : par théorème des valeurs intermédiaires, elle est donc de signe constant, on peut la supposer strictement positive.

Cela implique en particulier que $0 = f(0) < f(\frac{3}{10}) < f(\frac{6}{10}) < f(\frac{9}{10})$ et $f(\frac{1}{10}) < f(\frac{4}{10}) < f(\frac{7}{10}) < f(1) = 0$.

En appliquant le TVI successivement entre les couples de valeurs de signes différents, on obtient le résultat voulu :

$$\boxed{f \text{ s'annule au moins 7 fois sur } [0,1]}$$

Correction exercice 2 : (1999)

On considère un cône dont la base est de rayon R et la hauteur vaut H.

1. On inscrit dans ce cône un cylindre, dont le rayon sera noté r et la hauteur h. On essaie d'exprimer son volume V en fonction d'une seule de ces deux variables, par exemple r. En effet, on voit que pour que le volume soit maximal, le cylindre doit prendre "toute la place possible", ce qui se reformule via le théorème de Thalès :
$$\frac{r}{R} = \frac{H-h}{H} \qquad \text{soit} \qquad h = H\left(1 - \frac{r}{R}\right)$$
On a donc l'expression du volume du cylindre :
$$V(r) = \pi r^2 h = \pi H\left(r^2 - \frac{r^3}{R}\right)$$
On peut alors dériver cette fonction afin de trouver ses extremums :
$$V'(r) = \pi H\left(2r - \frac{3r^2}{R}\right)$$
Cette dérivée s'annule pour $r = 0$ (cas inintéressant) et $r = \frac{2}{3}R$, ce qui nous donne un maximum du volume :
$$\boxed{V_{\max} = \frac{4\pi H R^2}{27}}$$

2. Cette fois, un dessin en coupe montre qu'il n'y a qu'une seule position raisonnable pour la sphère : posée sur la base du cône, et tangente aux parois. On cherche alors le rayon r de cette sphère. La condition de tangence se traduit sur la vue en coupe par l'orthogonalité du côté du triangle et du rayon du cercle. Si on note θ le demi angle au sommet du cône, on a en considérant succcessivement les triangles rectangles machin et bidule, les relations :
$$\tan(\theta) = \frac{R}{H} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{r}{H-r}$$
On peut donc exprimer r en fonction de $\sin(\theta)$:
$$r = \frac{H\sin(\theta)}{1+\sin(\theta)}$$
Reste à exprimer $\sin(\theta)$ en fonction de $\tan(\theta)$, que l'on connaît :
$$\tan^2 = \frac{\sin^2}{\cos^2} = \frac{\sin^2}{1-\sin^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \sin^2(1+\tan^2) = \tan^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \sin = \frac{\tan}{\sqrt{1+\tan^2}}$$

On en déduit :

$$r = \frac{H\tan(\theta)}{\tan(\theta) + \sqrt{1+\tan^2(\theta)}}$$

$$\boxed{r = \frac{R}{\frac{R}{H} + \sqrt{1+\frac{R^2}{H^2}}}}$$

Correction exercice 3 : (2012)

On va utiliser la propriété de "décroissance partielle" sur les premiers termes afin de se faire une idée :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \operatorname{card}\{k \in [\![0, n-1]\!],\ u_k \geq 2u_n\} \geq n/2 \tag{1}$$

— On sait que $u_0 = 1$.
— Au rang 1, c'est simple : $2u_1 \leq u_0$ d'où $u_1 \leq 1/2$
— De même $u_2 \leq 1/2$
— Au rang 3 cela change, car plus de la moitié des termes précédents sont $\leq 1/2$: $2u_3 \leq 1/2$ d'où $u_3 \leq 1/4$
— De même $u_4, u_5, u_6 \leq 1/4$
— Au rang 7 cela change de nouveau, car plus de la moitié des termes précédents sont $\leq 1/4$: $2u_7 \leq 1/4$ d'où $u_7 \leq 1/8$
— De même $u_8, u_9, u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14} \leq 1/8$
— Au rang 15 cela rechange, etc...

Cette étude des premiers termes montre qu'on peut majorer (u_n) par une suite (v_n) constante par paliers de longueurs correspondant aux puissances de deux : notre majoration s'améliore au fur et à mesure, dès que suffisamment des termes précédents sont inférieurs à une valeur donnée.

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(k)$ la propriété

$$\boxed{\forall n \geq 2^k - 1,\ 0 \leq u_n \leq 2^{-k}}$$

que l'on va démontrer par récurrence sur k.

Amorce : Prenons $k = 0$: il faut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$, ce que l'on va faire par récurrence forte sur n. Pour $n = 0$, c'est dans la définition de la suite. Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque : supposons maintenant la propriété vraie pour tous les termes $u_0, ..., u_n$: par la propriété (1) $2u_{n+1}$ est inférieur à au moins la moitié de ces termes, en particulier $u_{n+1} \leq 1/2 \leq 1$. Par le principe de récurrence, cette propriété est vraie pour tout n.
Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Prenons maintenant $k \in \mathbb{N}$ quelconque et supposons $\mathcal{P}(k)$ vérifiée : on veut montrer que $\mathcal{P}(k+1)$ l'est aussi, autrement dit que si $n \geq 2^{k+1} - 1$, $u_n \leq 2^{-(k+1)}$. Considérons donc un rang $n \geq 2^{k+1} - 1$: on a $n/2 \geq 2^k - 1/2$, donc la propriété (1) nous dit qu'il existe au moins 2^k entiers $l \in [\![0, n-1]\!]$ tels que $u_l \geq 2u_n$. Puisque l'ensemble $[\![0, 2^k - 2$ est de cardinal $< 2^k$, l'un de ces entiers l sera donc $\geq 2^k - 1$, ce qui permet d'appliquer l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(k)$: $u_l \leq 2^{-k}$ d'où $u_n \leq u_l/2 \leq 2^{-(k+1)}$.
Donc $\mathcal{P}(k) \implies \mathcal{P}(k+1)$.

Conclusion : Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(k)$ est vérifiée pour tout entier k.

Reprenons maintenant la définition de la limite d'une suite : on dit que $u_n \to a$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - a| \leq \varepsilon$$

On veut montrer que $u_n \to 0$. Soit $\varepsilon > 0$: on cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $|u_n| \leq \varepsilon$. Puisque la suite $(2^{-k})_{k\in\mathbb{N}}$ est de limite nulle, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\varepsilon \geq 2^{-k_0}$. Posons alors $N = 2^{k_0} - 1$ et utilisons la propriété $\mathcal{P}(k_0)$: pour tout $n \geq N$, $0 \leq u_n \leq 2^{-k_0} \leq \varepsilon$. On peut donc conclure :

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

Correction exercice 4 : (1996)

Première remarque : quoi qu'il arrive, la suite (u_n) n'est composée que de termes entiers strictement positifs.

1. Supposons par l'absurde que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > a$. On va définir une extraction ϕ de telle sorte que la suite $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ soit strictement décroissante.
   Tout d'abord $\phi(0) = 0$. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$, supposons $u_{\phi(0)} > ... > u_{\phi(n)}$ construits.
   — Si $u_{\phi(n)}$ est pair, on pose $\phi(n+1) = \phi(n) + 1$, alors $u_{\phi(n+1)} = \frac{u_{\phi(n)}}{2} < u_{\phi(n)}$.
   — Si $u_{\phi(n)}$ est impair, on pose $\phi(n+1) = \phi(n) + 2$, alors $u_{\phi(n+1)} = \frac{u_{\phi(n)}+a}{2} < \frac{u_{\phi(n)}+u_{\phi(n)}}{2} = u_{\phi(n)}$ par l'hypothèse initiale.
   On a donc trouvé une sous-suite infinie de (u_n) composée d'entiers positifs et strictement décroissante, ce qui forme une contradiction. On peut conclure :
   $$\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}, u_{n_0} \leq a}$$
2. Prenons maintenant $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leq a$ (par exemple $n = n_0$).
   — Si u_n est impair, on a $u_{n+1} = u_n + a > a$
   — Si u_n est pair, on écrit $u_n = 2^k m$ avec m impair. On trouve alors $u_{n+k} = m$ et $u_{n+k+1} = m + a > a$.
   On voit donc que u_n finit par repasser au-dessus de a, et que dans les deux cas ci-dessus le nombre atteint, noté x (x valant soit u_{n+1}, soit u_{n+k+1}) est pair et inférieur à $2a$. Le terme suivant de la suite sera donc $\frac{x}{2} \leq a$.
   Ainsi une infinité de termes de la suite sont $\leq a$, ce qui prouve en particulier l'existence d'indices $n_1 < n_2$ tels que $u_{n_1} = u_{n_2}$ (puisque l'intervalle $[\![0, a]\!]$ est fini). Posons $P = n_2 - n_1$. Si on note f la fonction telle que $u_{n+1} = f(u_n)$, on a alors l'égalité $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{P \text{ itérations}}(u_{n_1}) = u_{n_1}$.
   Et plus généralement, pour tout $n \geq n_1$,
   $$u_{n+P} = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n+P-n_1 \text{ itérations}}(u_{n_1}) = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n-n_1 \text{ itérations}} \circ \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{P \text{ itérations}}(u_{n_1}) = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n-n_1 \text{ itérations}}(u_{n_1}) = u_n$$
   La suite est donc $\boxed{\text{périodique de période } P \text{ à partir du rang } n_1}$.

Correction exercice 5 : (2015)

1. Notons S_i la variable aléatoire donnant le score du joueur i, pour $i \in [\![1, k]\!]$. Ces variables ont toutes la même loi, qui est celle d'une variable S décrite par les probabilités ci-dessous :

$$\forall s \in [\![0, n-1]\!], \mathbb{P}(S = s) = (1-p)^s p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(S = n) = (1-p)^n$$

2. Notons UG l'évènement "il y a un unique gagnant", et UG_s l'évènement "il y a un unique gagnant et celui-ci a le score s", pour $s \in [\![1, n]\!]$.
   Soit $s \in [\![0, n-1]\!]$. On peut d'abord écrire :

$$UG_s = \bigcup_{i=1}^{k} \left([S_i = s] \cap \bigcap_{j \neq i} [S_j > s] \right)$$

   Or pour tout $(i, j) \in [\![1, k]\!]^2$, $\mathbb{P}(S_i = s) = p(1-p)^s$ et $\mathbb{P}(S_j > s) = (1-p)^{s+1}$ (somme d'une suite géométrique).
   De plus les résultats des différents joueurs sont indépendants :

$$\mathbb{P}\left([S_i = s] \cap \bigcap_{j \neq i} [S_j > s] \right) = \mathbb{P}(S_i = s) \cdot \prod_{j \neq i} \mathbb{P}(S_j > s) = p(1-p)^s((1-p)^{s+1})^{k-1}$$

   Et puisque les évènements de l'union sont deux à deux incompatibles, on en déduit :

$$\mathbb{P}(UG_s) = kp(1-p)^{k-1}((1-p)^k)^s$$

   Or on a $UG = \bigcup_{s=0}^{n-1} UG_s$ et cette union est disjointe. D'où finalement :

$$\mathbb{P}(UG) = kp(1-p)^{k-1} \sum_{s=0}^{n-1} ((1-p)^k)^s = kp(1-p)^{k-1} \frac{1-(1-p)^{kn}}{1-(1-p)^k}$$

   On peut donc conclure :

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(UG) = \frac{kp(1-p)^{k-1}}{1-(1-p)^k}$$

3. C'est trop moche, j'ai renoncé...

Correction exercice 6 : (2013)

1. (a) Soit (a, b) une suite de longueur 2. Supposons que cette suite est superbe : cela implique $a|(a+b)$ et $b|(a+b)$, ce qui entraîne $a|b$ et $b|a$, autrement dit $a = b$. Réciproquement, les suites de la forme $\boxed{(a, a), a \in \mathbb{N}}$ conviennent.

   (b) Soit (a, b, c) une suite de longueur 3, on peut sans perdre de généralité supposer $a \geq b \geq c$. Supposons que cette suite est superbe. On a donc l'existence d'un entier α tel que $a + b + c = \alpha a$, avec $\alpha \leq 3$ (car $a + b + c \leq 3a$), et d'un entier β tel que $a + b + c = \beta b$. Distinguons les différents cas :

   $\alpha = 3$: Cela implique $a = b = c$, c'est bien sûr une possibilité : notre suite a donc la forme $\boxed{(c, c, c), c \in \mathbb{N}}$.

   $\alpha = 2$: Cela implique $b + c = a$. On utilise alors $a + b + c = \beta b = 2a$. On a donc $\beta > 2$ (car $b < a$, le cas $b = a$ ayant été traité plus haut) et $\beta \leq 4$ (car $(\beta - 2)b = 2c$ et $b \geq c$).
   Si $\beta = 3$, $a = \frac{3}{2}b = b + c$ d'où $c = b/2 = a/3$. Notre suite a donc la forme $\boxed{(3c, 2c, c), c \in \mathbb{N}}$.
   Si $\beta = 4$, $a = 2b = b + c$ d'où $c = b$. Notre suite a donc la forme $\boxed{(2c, c, c), c \in \mathbb{N}}$.

   $\alpha \leq 1$: Impossible sinon $b + c = 0$.

2. Commencons par prendre une suite superbe de longueur trois dont les termes sont tous distincts, en s'aidant de la question précédente : par exemple $\boxed{(u_1, u_2, u_3) = (1, 2, 3)}$. On veut rajouter un terme u_4 de telle sorte que (u_1, u_2, u_3, u_4) reste superbe. Cela implique $\forall i \in [\![1, 3]\!], u_i | (u_1 + u_2 + u_3 + u_4)$, et puisque ces u_i divisent déjà $u_1 + u_2 + u_3$, il faut que les u_i divisent u_4. Le choix le plus simple est alors de prendre $u_4 = u_1 + u_2 + u_3$, et on a bien ce qu'on veut.

   Plus généralement, on peut définir les termes de la suite par récurrence. Soit n un entier ≥ 3 : si on suppose $(u_1, ..., u_n)$ construits de telle sorte que la suite finie de taille n soit superbe, on rajoute $\boxed{u_{n+1} = u_1 + ... + u_n}$ et on préserve la propriété au rang $n + 1$.

3. Soit $n \geq 2$: supposons qu'il existe une suite superbe $(p_1, ..., p_n)$ composée uniquement de nombres premiers distincts. On aurait alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $p_i | (p_1 + ... + p_n)$. Or par le théorème de Gauss, les p_i étant évidemment premiers entre eux, on aurait alors $(p_1 \times ... \times p_n) | (p_1 + ... + p_n)$

   Or on va montrer par récurrence que pour tout $n \geq 2$, $(p_1 \times ... \times p_n) > (p_1 + ... + p_n)$, ce qui fournit une contradiction. Pour cela, utilisons le lemme suivant : si a et b sont des entiers avec $2 \leq a < b$, on a $a + b < ab$. En effet, $a + b < b + b = 2b \leq ab$.

   Pour $n = 2$, puisqu'on travaille avec des nombres premiers distincts, on peut supposer sans perte de généralité $p_2 > p_1 \geq 2$, ce qui d'après le lemme suffit pour obtenir ce qu'on veut.

   Supposons maintenant la propriété vraie au rang $n \geq 2$:

   $(p_1 + ... + p_n + p_{n+1}) \leq (p_1 + ... + p_n) \times p_{n+1} < (p_1 \times ... \times p_n) \times p_{n+1}$

   la première inégalité découlant du lemme avec $(a, b) = ((p_1 + ... + p_n), p_{n+1})$ et la deuxième de l'hypothèse de récurrence. On a dont le résultat attendu :

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{(p_1 \times ... \times p_n) | (p_1 + ... + p_n) \text{ et } (p_1 \times ... \times p_n) > (p_1 + ... + p_n)}$ d'où une contradiction évidente. Une telle suite superbe n'existe pas.

4. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite magnifique telle que $\forall k \geq 2, a_{k+1} > a_k$.

   D'après la question 1.a), puisque (a_1, a_2) est superbe, $a_1 = a_2$.

   D'après la question 1.b), (a_1, a_2, a_3) étant superbe et sachant $a_3 > a_2$, on a $a_3 = 2a_2$.

   Montrons par récurrence forte que pour tout $k \geq 2$, $a_k = 2^{k-2} a_1$. L'amorce est déjà faite.

   Supposons la propriété vraie pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, et montrons qu'elle est vraie pour $n+1$. Par hypothèse de récurrence, $a_1 + ... + a_n = 2^{n-1} a_1$ est multiple de a_1. Puisque $(a_1, ..., a_{n+1})$ est superbe, on doit avoir $a_1 | a_{n+1}$ également. De plus, $a_{n+1} | (a_1 + ... + a_n) = 2^{n-1} a_1$, et puisque $a_{n+1} > a_n = 2^{n-2} a_1$, alors $a_{n+1} = 2^{n-1} a_1$ comme prévu.

   Les seules suites magnifiques strictement croissantes à partir du rang 2 sont de la forme

   $\boxed{(a, a, 2a, 4a, 8a, ..., 2^n a, ...), a \in \mathbb{N}}$

5. Soient $n \geq 4$ et $(a_1, ..., a_n)$ une suite pas forcément superbe d'entiers strictement positifs. En s'inspirant de l'indication donnée, on pose $S = a_1 + a_2 + ... + a_n$ et $P = a_1 \times a_2 \times ... \times a_n$. En rajoutant à la suite $(a_1, ..., a_n)$ le même motif répété $P - 1$ fois, on obtient la suite finie

$$\boxed{\underbrace{(a_1, ..., a_n, a_1, ..., a_n, ..., a_1, ..., a_n)}_{P \text{ répétitions}}}$$

   La somme totale des termes de la suite sera alors PS, et puisque P est divisible par chacun des a_i, PS aussi. La suite complétée ainsi est donc bien superbe.