Préparation au concours général de mathématiques (Enoncés)

Exercice 1 : (2005)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f(0) = f(1) = 0$ et telle que pour tout $x \in \left[0, \frac{7}{10}\right]$, $f\left(x + \frac{3}{10}\right) \neq f(x)$.
Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins 7 solutions sur $[0,1]$.

Se demander où sont situées les valeurs $f(\frac{k}{10})$ pour $k \in [\![1,9]\!]$. Utiliser ensuite le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 2 : (1999)

On considère un cône dont la base est de rayon R et la hauteur vaut H.

1. Quel est le volume maximal d'un cylindre intérieur à ce cône et de même génératrice ?
   Faire un dessin, puis exprimer la fonction volume en fonction d'une (seule) variable adéquate, et enfin dériver.
2. Quel est le volume maximal d'une boule intérieure à ce cône et dont le centre se trouve sur la génératrice ?
   Comment se traduit le fait que la sphère soit "tangente" aux parois du cône ?

Exercice 3 : (2012)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels positifs telle que $u_0 = 1$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, au moins la moitié des termes $u_0, ..., u_{n-1}$ sont supérieurs à $2u_n$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Commencer par majorer les premiers termes, étudier ce qui se passe pour $u_0, u_1, ..., u_9$. En déduire cette propriété, à prouver par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq 2^k - 1$, $u_n \leq 2^{-k}$. Puis conclure à l'aide de la définition formelle d'une limite.

Exercice 4 : (1996)

Soient a un entier naturel impair et b un entier strictement positif. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie :

$$u_0 = b \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ u_n + a & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Démontrer qu'il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} \leq a$.
   Raisonner par l'absurde : si pour tout n, $u_n > a$, on peut trouver une sous-suite de (u_n) strictement décroissante.
2. Démontrer que la suite est périodique à partir d'un certain rang.
   De même, montrer que si $u_n < a$, on repasse au bout d'un moment au dessus de a. En déduire l'existence de deux indices $n_1 < n_2$ tels que $u_{n_1} = u_{n_2}$. Que se passe-t-il pour $n \geq n_1$?

Exercice 5 : (2015)

Dans ce problème, k et n sont des entiers supérieurs ou égaux à deux. Un groupe de k personnes dispose d'une pièce de monnaie pas forcément équilibrée, pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" est notée p, avec $p \in]0,1[$.

Chaque joueur lance la pièce au plus n fois en s'arrêtant s'il obtient pile : son score est alors le nombre d'échecs, c'est-à-dire le nombre de "face". Ainsi, si un joueur obtient "pile" au premier lancer, son score est 0 et il s'arrête de lancer ; s'il obtient "pile" au deuxième lancer (après un "face"), son score est 1 ; s'il obtient "pile" au n-ième lancer (après $n-1$ "face"), son score est $n-1$; s'il n'obtient pas "pile" durant les n lancers, son score est n.

Après les lancers, chaque joueur a un score. Le ou les gagnants sont les joueurs qui ont réalisé le plus petit score.

1. Déterminer la loi de probabilité du score d'un joueur donné.
2. Déterminer la probabilité qu'il y ait un unique gagnant, puis la limite de cette probabilité quand n tend vers l'infini.
   Se ramener d'abord à la probabilité qu'un joueur donné soit l'unique gagnant, puis construire un arbre en distinguant selon ses différents scores possibles.
3. Déterminer l'espérance du nombre de gagnants, puis la limite de cette espérance quand n tend vers l'infini.

Exercice 6 : (2013)

Dans ce problème on considère des suites finies d'entiers strictement positifs $(a_1, ..., a_n)$, où $n \in \mathbb{N}^*$ est appelé longueur de la suite. On dit qu'une suite finie d'entiers positifs est *superbe* si chaque terme divise la somme de tous ses termes.

1. Déterminer les suites superbes de longueur 2 et 3, puis celles de longueur 4 dont la somme des termes est 2013. Montrer que si une suite arithmétique de raison strictement positive est superbe, alors sa longueur est 3.
2. Montrer que pour tout $n \geq 3$, il existe une suite superbe de longueur n dont les termes sont tous distincts.
   Construire une suite superbe par récurrence, en cherchant à chaque étape les critères que doit vérifier le nombre à rajouter.
3. Montrer que si $n \geq 2$, il n'existe pas de suite superbe de longueur n dont tous les termes soient des nombres premiers distincts.
   On pourra admettre que si $p_1, ..., p_r$ sont des nombres premiers qui divisent tous un entier m, alors leur produit $p_1 \times \cdots \times p_r$ divise également m (théorème de Gauss).
   On montrera ensuite que pour toute famille d'entiers $x_1, ..., x_r$ supérieurs ou égaux à 2, $\prod x_i \geq \sum x_i$.
4. On dit qu'une suite infinie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'entiers strictement positifs est magnifique si pour tout n, la suite $(a_1, ..., a_n)$ est superbe. Déterminer les suites magnifiques strictement croissantes à partir du rang 2.
   Remarquer qu'on peut écrire les termes à partir du troisième comme multiples des précédents, et pas n'importe quels multiples.
5. Soient $n \geq 4$ et $(a_1, ..., a_n)$ une suite pas forcément superbe d'entiers strictement positifs tous distincts. Montrer qu'on peut la prolonger de manière à obtenir une suite superbe.
   Et si on répétait le motif de la suite $a_1, ..., a_n$ assez de fois pour s'en sortir ?