MP*, Lycée Louis-le-Grand

Colles de Mathématiques

Guillaume Dalle

2016-2017

Table des matières

Analyse

1. Suites et séries numériques

Exercice 1.1:

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, x_n l'unique solution réelle positive de l'équation $x\ln(x) = n$. Trouver un développement asymptotique de x_n quand $n \to \infty$.

Indication 1.1:

Commencer par justifier que $x_n \to +\infty$, puis que $x_n = o(n)$. Ensuite, bidouiller pour trouver l'équivalent $x_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n}{\ln n}$ puis poser $y_n = x_n - \frac{n}{\ln n}$ et trouver finalement un équivalent de x_n :

$$x_n = \frac{n}{\ln(n)} + \frac{n\ln(\ln(n))}{\ln^2(n)} + o\left(\frac{n\ln(\ln(n))}{\ln^2(n)}\right)$$

Exercice 1.2:

Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans lui-même, (u_n) la suite récurrente définie par $u_0 \in [0,1]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que $u_{n+1} - u_n \to 0$.

1. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est un intervalle.
2. En déduire que (u_n) converge vers un point fixe de f.

Indication 1.2:

Pour le 1, prendre $x < y$ deux valeurs d'adhérence de (u_n), $z \in]x,y[$ et supposer que z n'est pas valeur d'adhérence : quelle contradiction obtient-on ?

Pour le 2, on pourra commencer par montrer que toute valeur d'adhérence de (u_n) est point fixe de f. Combien de valeurs d'adhérence la suite (u_n) peut-elle alors avoir ?

Exercice 1.3:

Soit (u_n) une suite de réels positifs, pour tout n on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On suppose $u_n S_n \to 1$. Que dire de u_n ?

Indication 1.3:

Exprimer u_n en fonction de S_n, et utiliser la condition $u_n S_n \to 1$ pour déterminer la limite quand $n \to \infty$ de $\int_{S_{n-1}}^{S_n} t dt$ par des encadrements judicieux. Cela permet de conclure.

Exercice 1.4:

Soit (u_n) une suite de réels positifs tels que $\sum u_n$ converge. Montrer que $\sum u_n^{1-1/n}$ converge aussi.

Indication 1.4:

Se demander pour quels indices on "aggrave la situation" : par exemple quand est-ce que $u_n^{1-1/n} > 2u_n$?

Exercice 1.5:

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Montrer que la série $\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p}$ diverge. Indice : on pourra noter que

$$-\frac{1}{p} \underset{p\to\infty}{\sim} \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right)$$

puis utiliser une série géométrique.

Exercice 1.6:

Démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$u_n \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} C$$

On pourra considérer la suite $v_n = \ln(u_n)$.

Exercice 1.7:

Soit (u_n) le terme général d'une série semi-convergente. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$: montrer qu'il existe ϕ une permutation de $\mathbb{N}$ telle que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{\phi(n)} = \alpha$$

Indication 1.7:

Remarquer que les sommes partielles composées des termes uniquement positifs et uniquement négatifs divergent toutes deux, et que $u_n \to 0$. Imaginer ensuite un procédé algorithmique pour s'approcher de plus en plus de α, en utilisant tour à tour des termes négatifs et positifs.

La rédaction intégrale serait laborieuse, donc on va faire ça "avec les mains" (voir https://www.google.fr/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=2&ved=0ahUKEwjC55KAiqrJAhXFXBoKHbDwCZEQFggrMAE&url=http%3A%2F%2Fmath.univ-lyon1.fr%2F~gelineau%2Fdevagreg%2FTheoreme_Riemann.pdf&usg=AFQjCNGwaffC1V8lHxQGPmETdzg&sig2=uT1KF2kXU_7ERGnQVhQL0w pour une explication plus rigoureuse)

Exercice 1.8:

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers injective, et $u_n = \text{ppcm}(a_1, ..., a_n)$.

1. Justifier que (u_n) est croissante, parfois constante pendant un certain nombre de termes (un palier) mais qu'elle tend forcément vers $+\infty$.
2. On note H_k la k-ième valeur prise par la suite (u_n) (la hauteur du k-ième palier), et L_k le nombre de termes prenant cette valeur (la largeur du palier correspondant).
   Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $H_k \geq 2^k$ et $L_k \leq 3\sqrt{H_n}$.
3. En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n} < +\infty$.

Exercice 1.9:

Soit $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ bijective. On suppose que $\lim_{n\to\infty} \frac{\phi(n)}{n}$ existe. Trouver sa valeur.

Exercice 1.10:

Soit (a_n) une suite réelle. On note respectivement $\limsup(a_n) = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k$ et $\liminf(a_n) = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k$.

1. Montrer que ces deux quantités existent, et sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur d'adhérence de (a_n).
2. On définit le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ par $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+, (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée}\}$.

   Montrer que ce rayon s'exprime par $R = \dfrac{1}{\limsup(a_n^{1/n})}$.

2. Fonctions vectorielles, fonctions convexes

Exercice 2.1:

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{R}$-ev de dimension n.

1. Soient $m \geq n+2$ et $(v_i)_{1 \leq i \leq m}$ une famille de vecteurs de E. Montrer qu'il existe une famille de scalaires $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq m}$ non tous nuls tels que :
$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = 0_E \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 0 \tag{1}$$
2. Soit X une partie non vide de E : on définit $\text{conv}(X)$ comme le plus petit convexe contenant X. Montrer :
$$\text{conv}(X) = \left\{ \sum_{j=1}^{n+1} \mu_j x_j, (v_1, ..., v_{n+1}) \in X^{n+1}, (\mu_1, ..., \mu_{n+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \text{ tq } \sum_{j=1}^{n+1} \mu_j = 1 \right\}$$

Indication 2.1:

Pour le 1, appliquer le théorème du rang à une application linéaire judicieusement choisie à valeurs dans $E \times \mathbb{R}$.

Pour le 2, on commencera par montrer que l'enveloppe convexe de X est constituée des barycentres à coeffs positifs d'un nombre quelconque d'éléments de X, avant de tenter de réduire ce nombre m :
$$\text{conv}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \mu_i v_i, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (v_1, ..., v_m) \in X^m, \quad (\mu_1, ..., \mu_m) \in \mathbb{R}_+^m \text{ tq } \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1 \right\}$$

Exercice 2.2:

Quelle est l'aire maximale d'un polygone à n côtés inscrit dans le cercle unité ?

Exercice 2.3:

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$. Soit $\alpha > 0$.
Etudier la convergence de la suite $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{k + i\alpha}\right)$.

3. Espaces vectoriels normés

Exercice 3.1:

Soient $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $H = \{f \in E, f(0) = 0\}$.

1. Soit N une norme sur E. Montrer que H est soit fermée soit dense dans (E, N).
2. Donner un exemple de norme pour chacun des deux cas.

Indication 3.1:

1. Quelle structure algrébrique possède $\overline{H}$?
2. Ne pas chercher trop loin.

Exercice 3.2:

Si $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle, on pose pour $P \in \mathbb{R}[X]$:
$$N_a(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k p_k|$$

1. L'application N_a est-elle une norme sur $\mathbb{R}[X]$?
2. Si a et b sont deux suites, à quelle condition les normes N_a et N_b sont-elles équivalentes ?

Indication 3.2:

1. Le point délicat est le caractère défini...
2. Que signifie la condition d'équivalence des normes ?

Exercice 3.3:

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $c_n \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \qquad |P(0)| \leq c_n \int_0^1 |P(t)| dt$$

2. Montrer que $c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

Indication 3.3:

1. A quoi correspond l'indice n dans c_n ?
2. Trouver une suite de polynômes adéquate.

Exercice 3.4:

On se place dans $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Soit $f \in E$. Montrer que $\|f\|_p \xrightarrow[p\to\infty]{} \|f\|_\infty$.

Exercice 3.5:

Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $a_1 < ... < a_k$ des éléments de $[0,1]$ et $E = \mathscr{C}^k([0,1], \mathbb{R})$. Montrer que les fonctions N_1 et N_2 définies par :

$$\forall f \in E, \qquad N_1(f) = \sum_{j=0}^{k} \|f^{(j)}\|_\infty \qquad \text{et} \qquad N_2(f) = \|f^{(k)}\|_\infty + \sum_{i=1}^{k} |f(a_i)|$$

sont deux normes équivalentes sur E.

Indication 3.5:

Cet exo là est particulièrement vicieux. Le but est bien sûr d'établir un contrôle de N_1 en fonction de N_2, l'inverse étant trivial. L'idée sera de partir dans l'autre sens, ie d'exprimer N_2 en fonction de N_1 puis d'inverser l'égalité obtenue pour arriver au résultat. Lire ces indications au fur et à mesure seulement, l'exercice est long.

— La première chose à faire est d'appliquer la formule de Taylor avec reste-intégrale aux $f(a_i)$ pour les exprimer en fonction des dérivéees successives de f en un certain point $x \in [0,1]$. Ce sont ces dérivées successives que l'on va tenter de borner.

— Formuler le problème de façon matricielle :

$$\begin{pmatrix} f(a_1) \\ f(a_2) \\ \vdots \\ f(a_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (a_1 - x) & \dots & (a_1 - x)^{k-1} \\ 1 & (a_2 - x) & \dots & (a_2 - x)^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (a_k - x) & \dots & (a_k - x)^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{f(x)}{0!} \\ \frac{f'(x)}{1!} \\ \vdots \\ \frac{f^{(k-1)}(x)}{(k-1)!} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_x^{a_1} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(a_1 - t)^{k-1} dt \\ \int_x^{a_2} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(a_2 - t)^{k-1} dt \\ \vdots \\ \int_x^{a_k} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(a_k - t)^{k-1} dt \end{pmatrix}$$

— En déduire (notamment grâce à vos connaissances sur les matrices de Vandermonde et à une formule donnant l'inverse d'une matrice en fonction de sa comatrice) une expression des dérivées successives de f

en n'importe quel point $x \in [0,1]$, puis majorer cette quantité uniformément en x. On pourra se ramener à la forme :

$$\forall j \in [\![0, k-1]\!], \quad \frac{f^{(j)}(x)}{(j-1)!} = \sum_{i=1}^{k} \phi_{i,j}(x) \left(f(a_i) - \int_x^{a_i} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(a_i - t)^{k-1} dt \right)$$

où les $\phi_{i,j}$ sont des fonctions continues sur $[0,1]$ à déterminer.

4. Topologie

Exercice 4.1:

Soit f une fonction $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans lui-même, a un point fixe de f tel que $|f'(a)| < 1$. On note :

$$f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}} \qquad \text{et} \qquad B = \{x \in \mathbb{R}, f^n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} a\}$$

1. Montrer qu'il existe δ tel que $x \in]a-\delta, a+\delta[\implies f^n(x) \to a$.
2. Montrer que B est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Indication 4.1:

1. Faire un dessin : tout ça est une histoire de pente de la fonction au voisinage du point fixe. Mais l'énoncé serait-il encore vrai pour une fonction seulement dérivable ?
2. Se demander comment x peut arriver dans $]a-\delta, a+\delta[$, essayer d'exprimer B en fonction d'ouverts plus simples.

Exercice 4.2:

1. Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $P(z) = 0 \implies |z| \leq \max\left(1, \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|a_n|}\right)$
2. Soit F un fermé de $\mathbb{C}$ et $E_n(F)$ l'ensemble des polynômes de degré n de $\mathbb{C}[X]$ dont toutes les racines sont dans F. Montrer que $E_n(F)$ est un fermé de $\mathbb{C}[X]$.

Indication 4.2:

Soit (P_k) une suite de polynômes de $E_n(F)$ convergeant vers $P \in \mathbb{C}[X]$.
— Montrer d'abord que la norme choisie importe peu.
— Les informations sur les racines de P ne pourront provenir que de ce qu'on sait sur les racines des P_k. Problème : celles-ci ne convergent pas forcément. Montrer cependant qu'elles sont bornées uniformément en k.
— Cela nous donne (via une petite astuce) un deuxième candidat pour la limite des P_k, qu'en dire ?

Exercice 4.3:

Soit $(E, \langle -, - \rangle)$ un espace préhilbertien réel de dimension infinie. Montrer que $S_E = \{x \in E, \|x\| = 1\}$ n'est pas compacte. Adapter la preuve au cas d'un espace vectoriel quelconque de dimension infinie.

Indication 4.3:

Construire une suite de vecteurs qui ne peut pas admettre de valeur d'adhérence, autrement dit qui sont tous suffisamment éloignés les uns des autres.

Exercice 4.4:

On dit qu'une partie A d'un evn (E, N) est connexe si les seuls $B \subset A$ à la fois ouverts et fermés dans A sont A et $\emptyset$. Montrer que si A est connexe par arcs, A est connexe.

Indication 4.4:

Soit $B \subset A$ une partie non vide, ouverte et fermée à la fois : montrer que $B = A$. Pour cela, prendre $x \in B$, $y \in A$, poser $\gamma : [0,1] \to A$ un chemin de x vers y et étudier l'ensemble $\{t \in [0,1], \gamma(t) \in B\}$.

Exercice 4.5:

Soit X une partie non compacte d'un espace normé de dimension finie. Montrer qu'il existe une application $f : X \to \mathbb{R}$ continue et non bornée.

5. Intégrales généralisées

Exercice 5.1:

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uniformément continue et dont l'intégrale converge. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$.

Indication 5.1:

Supposons que f soit uniformément continue mais ne tende pas vers 0 en $+\infty$: notons F une de ses primitives. Il s'agit d trouver une suite x_n tendant vers $+\infty$ et un réel δ tel que $F(x_n + \delta) - F(x_n - \delta)$ ne tende pas vers 0.

Exercice 5.2:

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue de carré intégrable. Montrer que $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = o(\sqrt{x})$

Indication 5.2:

Obtenir $O(\sqrt{x})$ est facile, il faut raffiner un peu pour obtenir le $o(\sqrt{x})$: l'idée est que le reste de l'intégrale convergente devient aussi petit qu'on veut (revenir à la définition d'un o en termes d'ε et séparer l'intégrale en 2 parties, l'une contrôlée grâce au reste de limite nulle et l'autre de longueur finie).

Exercice 5.3:

Soient $\lambda \in]0,1[$, $a > 0$.

1. Montrer que si $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est périodique de période nulle, $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{g(t)}{t} dt$ converge.
2. Montrer qu'il existe une unique suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
$$a_0 = a \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{1+\cos t}{t} dt = \frac{1}{n+\lambda}$$
3. Quelle est la limite de (a_n) ?
4. Montrer qu'il existe un unique choix de a tel que $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} n$.

Indication 5.3:

Soient $\lambda \in]0,1[$, $a > 0$.

1. Comment avait-on procédé dans le cas du sinus par exemple ?
2. Pas de souci par ici.
3. Que se passerait-il si (a_n) était bornée ?
4. A quelle condition sur deux suites u_n et v_n a-t-on $e^{u_n} \underset{n\to\infty}{\sim} e^{v_n}$? Un DL et une sommation des relations de comparaison vous aideront à choisir a (en fonction de λ) tel que cette relation soit vérifiée (sans toutefois obtenir d'expression explicite).

Exercice 5.4:

Une suite de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite équirépartie modulo 1 si pour tout intervalle $[a,b] \subset]0,1[$, on a

$$N_n(a,b) = \text{card}\{k \in [\![1,n]\!], \;\; x_k - \lfloor x_k \rfloor \in [a,b]\} \underset{n\to\infty}{\sim} n(b-a)$$

Soit (x_n) une suite équirépartie modulo 1 et f une fonction continue 1-périodique.
Que dire de la suite $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$?

Exercice 5.5:

Soit $r \in \mathbb{C}$, $|r| < 1$. Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{r^2 - 2r\cos\theta + 1}$.

6. Suites de fonctions

Exercice 6.1:

Soit l'opérateur ϕ défini par :

$$\forall f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \qquad \phi(f)(0) = f(0) \qquad \forall x > 0, \quad \phi(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$$

Etudier la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie ci-dessous :

$$f_0 = f \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_{n+1} = \phi(f_n)$$

Exercice 6.2:

1. Montrer que la suite de polynômes définie par

$$P_0(x) = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n(x)^2)$$

   converge uniformément sur $[0, 1]$ vers $x \mapsto \sqrt{x}$. En déduire une approximation polynômiale de $x \mapsto |x|$.
2. Retrouver le théorème de Weierstrass.

Exercice 6.3: *Théorème d'Ascoli*

Soient $M > 0$, (f_n) une suite de fonctions continues sur $[0, 1]$ et M-lipschitziennes. On suppose que (f_n) converge simplement vers une certaine fonction f. Montrer que la convergence est uniforme sur $[0, 1]$.

7. Séries de fonctions

Exercice 7.1:

Le but de l'exercice est de montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe un rationnel q_k tel que

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} = q_k \pi^{2k}$$

Soit pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$:

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x - n}$$

1. Montrer que f est bien définie, impaire, 1-périodique et vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}, \qquad 2f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

2. Montrer que la fonction $g : x \mapsto f(x) - \pi\cot(\pi x)$ se prolonge continûment en 0, puis sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que g vérifie la même équation fonctionnelle que f.
4. En considérant le maximum de g sur $[0,1]$, montrer que g est identiquement nulle.
5. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\pi x \cot(\pi x) = 1 - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{n^2} \frac{1}{1-\left(\frac{x}{n}\right)^2}$$

6. Conclure par unicité du développement limité de la cotangente (on s'autorisera à intervertir deux sommes infinies, la justification arrive bientôt dans le cours).

Exercice 7.2:

Soient $\alpha > 0$. On définit :

$$f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n^\alpha x}$$

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son domaine, trouver des équivalents aux bords.

Exercice 7.3:

1. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que O s'écrit comme union au plus dénombrable d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.
2. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Justifier qu'il existe une fonction f de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que f soit > 0 sur I et nulle sur $\mathbb{R}\backslash I$. Indice : la première brique est la fonction

$$g : x \mapsto \begin{cases} \exp(-1/x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Soit F un fermé de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une fonction f de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que F soit l'ensemble des zéros de f. Ecrire pour cela $O = \mathbb{R}\backslash F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, poser f_n une fonction comme dans la question précédente pour chaque intervalle I_n et chercher f sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n f_n$ où les a_n seront judicieusement choisis.

8. Limites et intégrales, intégrales à paramètre

9. Séries entières

Exercice 9.1: *Théorème de Liouville*

On se donneune série entière de rayon de convergence $R > 0$:

$$f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

1. Montrer que pour tout $r < R$ on a

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(r\mathrm{e}^{it})e^{-int}dt$$

2. Supposons $R = +\infty$. Montrer que si f est bornée sur $\mathbb{C}$, alors f est constante.

Exercice 9.2: *Nombres de Catalan*

Pour tout $k \geq 2$ on note c_k le nombre de façons de trianguler un polygone convexe à $k+2$ côtés.

1. Trouver une relation de récurrence vérifiée par la suite (c_k).

2. En passant par une série entière, montrer que pour tout k, on a $c_k = \dfrac{1}{k+1}\dbinom{2k}{k}$.

Exercice 9.3:

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, quel est le rayon de convergence de la série entière $f_A(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{Tr}(A^k)z^k$? Exprimer f_A en fonction de χ_A et χ'_A.

Exercice 9.4:

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1, telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge : soit S sa valeur. On se donne $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et on note $\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0, \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0] \text{ tels que } z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$ (dessiner ce domaine).

En notant $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k$ et en effectuant une transformation d'Abel (HP), montrer que lorsque $z/to1$ en restant dans Δ_{θ_0}, $f(z) \to S$.

Exercice 9.5:

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un nombre algébrique non rationnel, c'est-à-dire qu'il admet un polynôme annulateur à coefficients entiers. On note P son polynôme minimal et d le degré de P (noter que $d \geq 2$). Le but est de déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \dfrac{z^n}{\sin(n\pi\alpha)}$.

1. En justifiant que P n'a pas de racine rationnelle, montrer que $\forall (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, |q^d P(p/q)| \geq 1$.
2. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que

$$\forall (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{A}{q^d}$$

   Commencer pour cela par montrer le résultat pour $\dfrac{p}{q} \in [\alpha - 1, \alpha + 1]$ à l'aide d'une célèbre inégalité.
3. Conclure sur le rayon de convergence de la série entière.

10. Calcul différentiel

11. Equations différentielles linéaires

Algèbre générale et linéaire

12. Structures algébriques usuelles

Exercice 12.1:

Soit G un groupe de cardinal n. Montrer que G est isomorphe à un sous-groupe de S_n.

Exercice 12.2:

Caractériser les groupes dont l'ensemble des sous-groupes est fini.

Exercice 12.3:

Soit G un groupe fini dont l'ensemble des automorphismes est trivial.

1. Montrer que G est abélien.
2. Montrer qu'on peut munir G d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{F}_2$.
3. En déduire que G est isomorphe au groupe trivial ou à $\mathbb{F}_2$.

Exercice 12.4:

1. Montrer que deux permutations sont conjuguées dans $\mathfrak{S}_n$ ssi elles ont dans leur décomposition un même nombre de cycles d'ordre k pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.
2. Déterminer tous les morphismes de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ dans $(\mathbb{C}, \cdot)$.

Exercice 12.5:

Soit G un groupe fini non abélien, on note $Z = \{x \in G, \forall y \in G, xy = yx\}$ et $C = \{(x, y) \in G^2, xy = yx\}$.

1. Soit H un sous-groupe de G. On définit la relation $\sim_H$ sur G par $x \sim_H y \iff xy^{-1} \in H$. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. En déduire le théorème de Lagrange : $|H|$ divise $|G|$.
2. Montrer qu'on peut munir G/Z (ensemble des classes d'équivalence sous la relation $\sim_Z$) d'une structure de groupe induite : c'est le groupe quotient de G par Z.
3. Montrer que si G/Z est monogène, G est abélien.
4. On tire au hasard un élément de G. Montrer que la probabilité qu'il appartienne à Z est inférieure à $1/4$.
5. On tire au hasard deux éléments de G. Montrer que la probabilité qu'ils commutent est inférieure à $5/8$.

Exercice 12.6:

Soit A un anneau commutatif qui n'est pas un corps. On dit qu'un idéal est maximal s'il n'est inclus dans aucun autre idéal et s'il est différent de A. On admet que tout idéal distinct de A est inclus dans un idéal maximal.

1. Montrer l'équivalence entre les énoncés suivants :
   (a) la somme de deux éléments non inversibles n'est pas inversible
   (b) l'ensemble J des éléments non inversibles forme un idéal distinct de A
   (c) A possède un idéal maximal unique
   On dit alors que A est un anneau local.
2. Montrer que si A est un anneau local, alors pour tout $x \in A$ l'un des deux éléments x et $1 - x$ est inversible.
3. Montrer que dans un anneau local, les seuls idempotents sont 0 et 1.

13. Arithmétique

Exercice 13.1:

Si $p \in \mathcal{P}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que $v_p(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$.

Exercice 13.2:

Soient n un entier ≥ 2 et $p_1 < ... < p_r$ les facteurs premiers de n.

1. Montrer que $\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) ... \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) \geq \frac{1}{r+1}$
2. En déduire que $\varphi(n) \geq \frac{n \ln 2}{\ln n + \ln 2}$

Exercice 13.3:

On note $d(n)$ le nombre de diviseurs de l'entier n. Montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $d(n) = O(n^\varepsilon)$.

Indication 13.3:

Commencer par décomposer n en produit de facteurs premiers. Montrer qu'on doit en fait majorer $\prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1 + \alpha(p)}{p^{\varepsilon \alpha(p)}}$

Se ramener à un produit fini dont la borne ne dépend pas de n mais seulement de ε, puis étudier les fonctions individuelles de α qui forment ce produit : elles sont bornées sur $\mathbb{N}$.

Exercice 13.4:

1. Soit p un entier premier. Montrer que $(p-1)! \equiv -1 \ [p]$.
2. Soit n un entier non premier. Calculer le reste dans la division euclidienne de $(n-1)!$ par n.

Indication 13.4:

1. Calculer le produit de tous les éléments de $\mathbb{F}_p^*$
2. Distinguer selon si n est un carré ou non.

Exercice 13.5:

Soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$.
Pour deux fonctions $(a, b) \in \mathfrak{F}^2$ on définit $(a \star b)$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad (a \star b)(n) = \sum_{d|n} a(d) b\left(\frac{n}{d}\right)$$

1. Montrer que $(\mathfrak{F}, +, \star)$ est un anneau commutatif. Quel est son élément nul ?
2. Montrer que $a \in \mathfrak{F}$ est inversible si et seulement si $a(1) \neq 0$.
3. On définit la fonction μ de Möbius par :

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 1 \\ (-1)^k \text{ si } n = p_1 ... p_k \text{ avec } p_1, ..., p_k \text{ des nombres premiers distincts} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

   Calculer $\mu \star 1$ où 1 est la fonction constante égale à 1.
4. Soient f, g deux éléments de $\mathfrak{F}$. On suppose que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(n) = \sum_{d|n} g(d)$$

   Exprimer g en fonction de f par une formule similaire.

Indication 13.5:

1. Pas de secret pour celle-ci.
2. Construire l'inverse par récurrence.
3. Effectuer un dénombrement : quels sont les termes pour lesquels $\mu = 1$ et $\mu = -1$ dans cette somme ? Montrer qu'il y en a autant des deux côtés.
4. Faire des calculs abstraits dans l'anneau adéquat.

14. Polynômes

Exercice 14.1:

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ simplement scindé sur $\mathbb{R}$, on se donne $\alpha > 0$. Montrer que l'ensemble

$$\left\{ x \in \mathbb{R},\ \frac{P'(x)}{P(x)} \geq \alpha \right\}$$

est une réunion finie d'intervalles finis et calculer sa longueur totale.

Exercice 14.2:

Trouver les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

Exercice 14.3:

Soit P un polynôme complexe non constant. Montrer que les racines de P' appartiennent à l'enveloppe convexe des racines de P.

Exercice 14.4:

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ simplement scindé sur $\mathbb{C}$. Montrer que P ne peut pas avoir deux coefficients consécutifs nuls.

Exercice 14.5:

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n. Montrer que

$$\max_{x \in [-1,1]} |P(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$$

Raisonner par l'absurde et comparer P à $\dfrac{T_n}{2^{n-1}}$, où T_n est le n-ème polynôme de Tchebychev.

Exercice 14.6:

Soit pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\phi_n = \prod_{\omega \in \mu_n} (X - \omega) \qquad \text{où} \qquad \mu_n = \{ \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in [\![1, n]\!], k \wedge n = 1 \}$$

1. Calculer ϕ_{p^m} pour p premier et $m \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{d|n} \phi_d = X^n - 1$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\phi_n \in \mathbb{Z}[X]$.
4. Calculer $\phi_n(1)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Quels sont les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que ϕ_n soit irréductible sur $\mathbb{Q}$?

15. Espaces vectoriels et applications linéaires

Exercice 15.1:

Montrer que $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension infinie.

Exercice 15.2:

Soient E et F des $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, $v \in \mathcal{L}(F)$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $f = g \circ u$ si et seulement si $\text{Ker } u \subset \text{Ker } f$.
2. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $f = v \circ g$ si et seulement si $\text{Im } f \subset \text{Im } v$.

Exercice 15.3:

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f s'écrit comme la composée d'un projecteur et d'un automorphisme.

Exercice 15.4:

Soit E un $\mathbb{R}$-ev. On dit qu'une famille $(v_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est positivement génératrice si tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{R}_+$ des v_i. Quel est le cardinal minimal d'une famille positivement génératrice si $\dim E = n$?

Exercice 15.5:

Soient $u_1, ..., u_n$ des endomorphismes nilpotents de $\mathbb{R}^n$ qui commutent deux à deux. Montrer que $u_n \circ \cdots \circ u_1$ est l'endomorphisme nul.

Exercice 15.6:

Montrer que si $\mathbb{K}$ est un corps infini et E un $\mathbb{K}$-ev, E n'est pas union finie de sous-espaces stricts.

Exercice 15.7:

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, et G un sous-groupe fini de $GL(E)$. Montrer l'égalité

$$\dim \bigcap_{g \in G} \text{Ker } (g - \text{id}_E) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{Tr}(g)$$

S'aider pour cela de l'endomorphisme $p = \dfrac{1}{|G|} \displaystyle\sum_{g \in G} g$.

Exercice 15.8:

Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Quels sont les endomorphismes stabilisant tous les sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ de dimension k ?

16. Matrices et déterminants

Exercice 16.1:

Soit $\mathbb{K}$ un corps fini de cardinal q. Calculer card $SL_n(\mathbb{K})$.

Exercice 16.2:

Prouver que les seuls idéaux bilatères de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont triviaux.

Exercice 16.3:

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que l'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{K}, A + \lambda B$ nilpotente $\}$ contient au moins $n+1$ éléments. Montrer que A et B sont nilpotentes.

Exercice 16.4: *S* oient $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n$ des complexes tels que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]$, $a_i + b_j \neq 0$.

Calculer le déterminant de la matrice $C = \left(\dfrac{1}{a_i + b_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ en s'aidant pour cela de la fraction rationnelle

$$F(X) = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1 + b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_1 + b_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{1}{a_{n-1} + b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_{n-1} + b_n} \\ \dfrac{1}{X + b_1} & \cdots & \dfrac{1}{X + b_n} \end{vmatrix}$$

Exercice 16.5:

Soit n un entier ≥ 2. Pour $E \subset [\![1,n]\!]^2$, on note M_E la matrice dont le coefficient $m_{i,j}$ vaut 1 si $(i,j) \in E$ et 0 sinon.

1. Calculer rgM_E pour $E = [\![1,n]\!]^2$ puis $E = [\![1,n]\!]^2 \backslash \{(i,i), i \in [\![1,n]\!]\}$.
2. Si E est un pavé, c'est-à-dire un produit de deux parties de $[\![1,n]\!]$, que vaut rgM_E ?
3. Quel est le nombre minimal de pavés formant une partition de $[\![1,n]\!]^2 \backslash \{(i,i), i \in [\![1,n]\!]\}$?

Exercice 16.6:

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|a_{i,i}| > \displaystyle\sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que A est inversible.

Exercice 16.7:

Quelles sont les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on ait $\det(A + M) = \det(M)$?

Exercice 16.8:

Montrer que $SL_n(\mathbb{C})$ est engendré multiplicativement par la famille $\{I_n + \lambda E_{i,j}, \lambda \in \mathbb{C}\}$. En déduire que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

17. Réduction 1 : éléments propres, diagonalisation

Exercice 17.1:

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tels que $AB - BA = \alpha A$. En calculant $A^k B - BA^k$, montrer que A doit être nilpotente.

Exercice 17.2:

Montrer que deux matrices à coefficients réels semblables sur $\mathbb{C}$ sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17.3:

On munit $\mathbb{C}^n$ d'une base $(e_1, ..., e_n)$. Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on définit la matrice P_σ par $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $P_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$.

1. Montrer que P_σ est diagonalisable.
2. Quel est son polynôme caractéristique ?

Exercice 17.4:

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$. Montrer que si B est diagonalisable, A est la matrice nulle.

Exercice 17.5:

Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre :
(i) f est diagonalisable
(ii) tout sous-espace stable par f admet un supplémentaire stable par f

Exercice 17.6:

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on note $\mathcal{S}(M)$ la classe de similitude de M. Montrer que M est nilpotente si et seulement si la matrice nulle appartient à l'adhérence de $\mathcal{S}(M)$.

18. Réduction 2 : polynômes d'endomorphismes, stabilité, trigonalisation

Exercice 18.1:

Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est semblable à une matrice dont tous les coefficients sont nuls en dessous de la sous-diagonale.

Exercice 18.2:

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(C)$: on pose $C(M) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AM = MA\}$. Montrer que $\dim C(M) \geq n$.
2. Si M est diagonalisable, donner une expression explicite de $\dim C(M)$.

Exercice 18.3:

Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Montrer que $|G| \leq p^n$.

Exercice 18.4:

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que M est semblable à une matrice diagonale par blocs dont les blocs sont de la forme $I_{n_i} + \lambda_i N_i$, où N_i est nilpotente d'indice $\leq n_i$.
2. Application : quelles sont les matrices M telles que $M^n \to 0$? telles que (M^n) soit bornée ? telles que (M^n) converge ?

Exercice 18.5:

Soient $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A^m l'est.

Exercice 18.6:

Soient $\mathscr{A} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exists p \in \mathbb{N}^*, M^p = I_n\}$ et $\mathscr{B} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{U}\}$.
Montrer que $\mathscr{B}$ est l'adhérence de $\mathscr{A}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, en prouvant successivement :

1. que $\mathscr{B}$ est fermée
2. que $\mathscr{B} \subset \bar{\mathscr{A}}$

19. Espaces euclidiens et leurs endomorphismes

Probabilités

20. Ensembles, combinatoire, dénombrement

Exercice 20.1:

Au soir du 24 décembre, le Père Fouettard fait prisonniers les 100 lutins du Père Noël dans ses cachots. Chaque cachot donne sur un couloir qui mène à une grande pièce où sont alignées 100 boîtes.

Sur chaque boîte, le nom d'un des lutins est écrit. Dans chaque boîte, il y a un papier avec un deuxième nom, pas forcément le même. Chaque nom est présent exactement une fois sur un couvercle et une fois sur une étiquette à l'intérieur.

Les lutins sont appelés successivement, et chacun a le droit d'ouvrir 50 boîtes à la suite. S'il trouve son propre nom parmi les étiquettes découvertes, il est libéré, sinon il reste en prison et les enfants n'auront pas de cadeaux. Les lutins n'ont pas le droit de communiquer entre eux, et ne savent pas ce qu'il y a dans une boîte avant de l'ouvrir. Proposer une stratégie qui assure que toute l'équipe du Père Noël ait au moins 30% de chances d'être délivrée (alors que si chacun ouvre 50 boîtes au hasard, la probabilité que toute l'équipe s'en sorte est de 2^{-100}).

21. Familles sommables

Exercice 21.1:

Soient $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. Montrer que $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

Exercice 21.2:

A quelles conditions sur α les familles $\left(\dfrac{1}{(p+q)^\alpha}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ et $\left(\dfrac{1}{p^\alpha+q^\alpha}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ sont-elles sommables ?

Exercice 21.3:

Soit $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, N une norme sur $\mathbb{R}^d$. La famille $\left(\dfrac{1}{N(v)^\alpha}\right)_{v\in\mathbb{R}^d}$ est-elle sommable ?

Exercice 21.4:

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes. Dire à quelle condition la famille $(u_{i_1}\cdots u_{i_n})_{n\in\mathbb{N}^*,(i_1,\dots,i_n)\in I^n}$ est sommable et calculer sa somme.

Exercice 21.5:

Soit $s \in]1,+\infty[$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| < s-1$. Montrer que $\zeta(s+h) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\zeta^{(k)}(s)}{k!} h^k$.

Exercice 21.6:

On note $l^1(\mathbb{N}^*)$ l'ensemble des suites complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge.

1. Soient (a_n) et (b_n) deux éléments de $l^1(\mathbb{N}^*)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $c_n = \displaystyle\sum_{d|n} a_d b_{n/d}$.

Montrer que $(c_n) \in l^1(\mathbb{N}^*)$ et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\right)$.

2. Soit d la fonction "nombre de diviseurs". Montrer que $\forall s > 1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d(n)}{n^s} = \zeta(s)^2$.
3. Soit μ la fonction de Möbius. Montrer que $\forall s > 1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$.
4. Soit σ la fonction "somme des diviseurs". Montrer que $\forall s > 2$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma(n)}{n^s} = \zeta(s)\zeta(s-1)$.
5. Soit φ l'indicatrice d'Euler. Pour $s > 2$, exprimer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\phi(n)}{n^s}$ à l'aide de ζ.

   On pourra utiliser la formule d'inversion de Möbius.

22. Espaces probabilisés

23. Variables aléatoires

24. Séries génératrices

Exercice 24.1:

On appelle partition d'un ensemble fini E tout ensemble $\{A_1, ..., A_p\}$ de parties non vides et deux à deux disjointes de E dont la réunion forme l'ensemble tout entier. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments (avec la convention $B_0 = 1$).

1. Montrer, si $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_{n-i}$.
2. En déduire que $\displaystyle f : z \in \mathbb{C} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini et qu'elle vérifie $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^z - 1}$.
3. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$.
4. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle \frac{B_n}{n!} \leq \exp(\mathrm{e}^r - 1 - n \ln r)$.
5. Comment optimiser cette inégalité ? Qu'en déduit-on asymptotiquement ?

Exercice 24.2: