Exercices de Probabilités

MPSI - MP

Sources :

- Pour les oraux :
  - Revue de la Filière Mathématiques : http://www.rms-math.com/
  - Base d'Epreuves Orales Scientifiques : http://beos.prepas.org/
  - Banque CCP MP 2015 : ccp.scei-concours.fr/cpge/oral/banque_2016_v2.pdf
- Pour les exos en vrac :
  - Base d'exercices Exo7 : exo7.emath.fr/ficpdf/ficall.pdf (attention gros fichier)
  - Exercices de Michel Quercia : http://michel.quercia.free.fr/
  - Cours d'Alain Troesch (MPSI 4, Lycée Louis-le-Grand) : http://alain.troesch.free.fr/
  - Cours d'Alain Sucquet (Université Lille 1) : http://math.univ-lille1.fr/~suquet/
  - Bestiaire d'exercices pour l'Agrégation de Patrice Lassère (Université Paul Sabatier, Toulouse) : https://www.google.fr/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0ahUKEwi1jr6J4fLKAhVKDxoKHU url=http%3A%2F%2Fwww.math.univ-toulouse.fr%2F~lassere%2Fpdf%2Fbestiaire.pdf&usg=AFQjCNGRCOHSMO

Ecrits 2015

- E3A MP Maths 1 (exercice 4) : www.e3a.fr/docs/2015/math_1_e3a_mp_2015.pdf
- E3A PSI Maths 1 (exercice 2) : www.e3a.fr/docs/2015/math_1_e3a_psi_2015.pdf
- CCP PC Maths (1er problème) : ccp.scei-concours.fr/cpge/sujet/2015/PC/PC-Math.pdf
- Centrale PSI Maths 1 : https://www.concours-centrale-supelec.fr/CentraleSupelec/2015/PSI/sujets
- Mines sujet 0 probas : https://www.google.fr/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=4&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwjYseTmqNnKAhWFAxoKHWLEAIMQFgguMAM&url=http%3A%2F%2Fwww.booleanopera.fr%2FDM%2FMP%2FMines2015ProbasZero.pdf&usg=AFQjCNErTaHDpD4Io6lftBqd8D5ExYEwgA
- Mines PC Maths 1 (partie V) : http://mines-ponts.fr/pages/upload/sujet/sujet.php
- Mines MP Maths 1 (partie B) : http://mines-ponts.fr/pages/upload/sujet/sujet.php
- Mines MP Maths 2 : http://mines-ponts.fr/pages/upload/sujet/sujet.php
- ENS MP Maths C : www.ens.fr/IMG/file/concours/2015/MPI/sujets/sujet_mpi_mathc2015.pdf

Oraux 2015 (et antérieurs)

X - ENS

Exercice I.1: *(ENS Ulm 2015)*

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. Soient $A_1, ..., A_n$ des évènements. Pour $k \in [\![1, n]\!]$ on note C_k l'évènement "appartenir à A_i pour au moins k valeurs de l'indice i". Montrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(C_k) \leq \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$.

Exercice I.2: *(ENS 2015)*

1) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, n]\!]$. Montrer que la loi de X est déterminée par les $\mathbb{E}(X^k)$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.
2) Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$? On suppose qu'il existe un réel $a \in]0, 1[$ tel que $\mathbb{P}(Y = k) = o(a^k)$ quand $k \to \infty$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(Y^n)$ existe. Montrer que les $\mathbb{E}(Y^n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ déterminent la loi de Y.

Exercice I.3: *(ENS 2015)*

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X_n = j) = 2^{-j}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + ... + X_n$.

Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{\ln(2) S_n}{n \ln(n)} - 1\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

Exercice I.4: *(ENS Cachan 2015)*

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes d'espérance finie. On considère les trois propriétés :

i) X ou Y est presque sûrement constante
ii) X et Y sont indépendantes
iii) $\mathbb{E}(XY)$ est finie et égale à $\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

1) Montrer que i) $\implies$ ii) $\implies$ iii)
2) Montrer que ii) n'implique pas i).
3) Que dire de X si elle est indépendante d'elle-même ?
4) Montrer que iii) n'implique pas ii). Indication : donner un contre-exemple en considérant X et Y indépendantes avec Y à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0$.
5) Soient Z et Z' deux variables indépendantes de même loi : trouver la loi de $\xi = (Z, Z')$.
6) Soient f et g deux fonctions réelles croissantes, considérons $X = f(Z)$, $Y = g(Z)$ et $\theta : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))$. On suppose que X et Y vérifient iii). Montrer que $\theta(\xi)$ est d'espérance finie et calculer $\mathbb{E}(\theta(\xi))$.
7) Montrer que $\theta(\xi)$ est presque sûrement constante.

Exercice I.5: *(Complément TIPE ENS 2015)*

1) Soit X une variable aléatoire réelle. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients $m_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq j \leq n$ sont indépendants identiquement distribués suivant la loi de X. Calculer

$$\mathbb{E}\left(\sum_{\lambda \in \sigma(M)} \lambda\right) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}\left(\sum_{\lambda \in \sigma(M)} \lambda^2\right)$$

Si $x \in \mathbb{R}_+$, trouver une borne pour

$$\mathbb{P}\left(\max_{\lambda \in \sigma(M)} |\lambda| \leq x\right)$$

2) Soit X une variable aléatoire de Rademacher : $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2}$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coiefficiens $m_{i,j}$ pour $1 \leq i, j \leq n$ suivent la loi de X. Déterminer $\mathbb{E}(\det M)$, $\mathbb{V}(\det M)$. Dire pourquoi $\det M \sim -\det M$

Exercice I.6: *(ENS Cachan 2014)*

Une partition d'un ensemble X est une partie de $\mathfrak{P}(X) \backslash \{\emptyset\}$ formée d'ensembles deux à deux disjoints et de réunion X. Soit B_n le nombre de partitions de $[\![1, n]\!]$.

1) Exprimer B_{n+1} en fonction de $B_0, ..., B_n$.
2) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{B_n}{n!} z^n$ et calculer sa somme
3) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité $B_n = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$.

Exercice I.7: *(ENS Ulm 2009)*

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $d(n)$ le nombre de diviseurs de n.

Pour $s \in \mathbb{R}$ on pose $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ et $f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d(n)}{n^s}$, ces deux valeurs appartenant à $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

1) Déterminer $s_0 = \inf\{s \in \mathbb{R} | f(s) < +\infty\}$.
2) Donner une relation entre $\zeta(s)$ et $f(s)$.
3) Donner un équivalent de f en s_0.

Exercice I.8: *(Polytechnique 2015)*

Pour tout sous-ensemble A de $\mathbb{N}$, on note $a_n = \mathrm{card}(A \cap \{1, ..., n\})$ et $\mu(A)$ la limite de $\frac{a_n}{n}$ lorsque $n \to \infty$ si celle-ci existe. Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des $A \subset \mathbb{N}$ tels que $\mu(A)$ existe.

1) Trouver des parties de $\mathbb{N}$ de mesure 0,1,$\frac{1}{2}$
2) Montrer que $\mathcal{L} \neq \mathcal{P}(\mathbb{N})$. $\mathcal{L}$ est-elle une tribu ?
3) La fonction μ est-elle σ-additive ? Peut-on la prolonger en une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$?

Exercice I.9: *(Polytechnique 2015)*

Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées à valeurs dans $\{-1, 1\}$. et de loi définie par $\mathbb{P}(B_1 = 1) = p$ et $\mathbb{P}(B_1 = -1) = q$ pour un couple $(p, q) \in]0, 1[^2$ tel que $p + q = 1$.

On pose $S_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} B_k$.

On introduit la variable aléatoire $T = \inf\{n \in \mathbb{N}, S_n = 1\}$ à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et on pose $f(n) = \mathbb{P}(T = n)$.

1) Montrer que $f(1) = p$ et que $\forall n \geq 2$, $f(n) = q \sum_{k=2}^{n-1} f(k-1) f(n-k)$.
2) Montrer que $g : s \mapsto \mathbb{E}(s^T \mathbf{1}_{\{T < +\infty\}})$ est bien définie au voisinage de 0, et qu'elle y vérifie $g(s) = ps + qsg(s)^2$.
3) En déduire la valeur de $f(n)$ pour tout n.

Exercice I.10: *(Polytechnique 2015)*

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé et à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On suppose Y d'espérance finie.

1) Montrer qu'il existe une fonction $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ telle que $g(X)$ soit d'espérance finie, et que pour toute fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ bornée on ait $\mathbb{E}(Yf(X)) = \mathbb{E}(g(X)f(X))$.
2) Montrer que g est définie de façon unique à un ensemble A près tel que $\mathbb{P}(X \in A) = 0$.

Exercice I.11: *(Polytechnique (?) 2015)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et S_n une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n, p)$

1) Montrer que pour tout $a > 0$, $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq \exp[-n \sup\limits_{s \in \mathbb{R}_+} (sa - \ln(1 - p + p\mathrm{e}^s))]$
2) Montrer qu'il existe $h_1 : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telle que $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq p + \varepsilon\right) \leq \mathrm{e}^{-nh_1(\varepsilon)}$, h étant indépendante de n.
3) Montrer qu'il existe $h_2 : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telle que $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq p - \varepsilon\right) \leq \mathrm{e}^{-nh_2(\varepsilon)}$, h étant indépendante de n.
4) Montrer qu'il existe $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telle que $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \varepsilon\right) \leq \mathrm{e}^{-nh(\varepsilon)}$, h étant indépendante de n.

Exercice I.12: *(Polytechnique - ENS Cachan 2015)*

On considère une série de n convertisseurs numériques fonctionnant de manière indépendante et placés en série. Chaque convertisseur restitue correctement le bit fourni avec une probabilité $p \in]0, 1[$, et renvoie le bit opposé avec une probabilité $1 - p$.

On note X_k le bit en sortie du k-ième convertisseur, X_0 le bit en entrée de chaîne.

On définit la suite (A_k) par $(A_k) = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_k = 1) \\ \mathbb{P}(X_k = 0) \end{pmatrix}$

1) Déterminer une relation de récurrence pour la suite (A_k).
2) En déduire la probabilité que le bit initial soit correctement rendu à la sortie du n-ième convertisseur. Que se passe-t-il quand $n \to \infty$?

Exercice I.13: *(Polytechnique - ENS Cachan 2015)*

On considère un dé pipé à six faces numérotées de 1 à 6. La probabilité d'obtenir la face k est notée p_k. On considère une suite de n lancers d'affilée $(x_1, ..., x_n)$, où x_i est la valeur de la face obtenue au i-ème lancer.

1) On note $N_k(n)$ le nombre d'apparitions de la face k dans la suite des n lancers. Que dire de $N_k(n)$ lorsque $n \to +\infty$?
2) En supposant que n vérifie $\forall k \in [\![1, 6]\!]$, $np_k \in \mathbb{N}$, quelle est la probabilité d'obtenir une suite $(x_1, ..., x_n)$ de lancers telle que $\forall k \in [\![1, 6]\!]$, $N_k = np_k$?

Exercice I.14: *(Polytechnique 2014)*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle dérangement de $[\![1, n]\!]$ toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ n'admettant aucun point fixe. On note d_n le nombre de dérangements de $[\![1, n]\!]$, avec $d_0 = 1$.

1) Montrer que la série entière $\sum \frac{d_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence non nul et déterminer sa somme.
2) En déduire son rayon et une expression de d_n.

Exercice I.15: *(Polytechnique 2009)*

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\alpha_n = \text{card } \{\sigma \in \mathfrak{S}_n$ n'ayant que des cycles de longueur $\leq n/2\}$.
   Calculer α_n et déterminer la limite de $(\alpha_n/n!)$ quand $n \to \infty$.

2) Un dictateur enferme 100 mathématiciens dans une pièce et leur tient le discours suivant : "J'ai écrit chacun de vos noms sur un papier, et j'ai placé chaque papier dans un des coffres de la pièce voisine. Chacun de vous va venir ouvrir 50 coffres qu'il choisira, et revenir sans avoi la possibilité de communiquer avec les autres. Vous serez libérés si chacun trouve le coffre avec le papier portant son nom. Sinon, nous recommencerons demain (une fois que j'aurai mélangé de nouveau le contenu des coffres).

Imaginer une stratégie permettant aux mathématiciens d'être libérés en un temps raisonnable.

Exercice I.16: *(Polytechnique 2009)*

Soient G un groupe fini, f un morphisme de G dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\pi = \dfrac{1}{|G|}\displaystyle\sum_{g\in G} f(g)$.

1) Montrer que π est un projecteur d'image $\displaystyle\bigcap_{g\in G} \text{Ker } (f(g) - I_n)$.
2) En déduire le nombre moyen de points fixes d'un élément du groupe symétrique $\S_n$.
3) Retrouver directement le résultat de 2).
4) Quel est le nombre moyen de points fixes d'un élément du groupe alterné $\mathfrak{A}_n = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n, \varepsilon(\sigma) = 1\}$?

Exercice I.17: *(Polytechnique 2007)*

1) Montrer que toute permutation de $\mathfrak{S}_n$ se décompose de façon unique sous forme d'un produit de cycles à supports disjoints. Les supports des cycles sont appelés orbites, un point fixe comptant aussi pour une orbite.
2) Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $\tau(\sigma)$ le nombre d'orbites de σ. Soit $P_n = \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} X^{\tau(\sigma)}$. Factoriser P_n.
3) On se place dans l'espace probabilisé $\Omega = \S_n$ muni de la loi uniforme : τ est alors une variable aléatoire. En remarquant que $P_n(t) = n!\mathbb{E}(t^\tau)$, en déduire l'espérance et la variance du nombre de points fixes d'une permutation aléatoire.

Mines-Ponts

Exercice I.18: *(Mines 2015)*

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $a > 1$. On note $\zeta(a) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{1}{\zeta(a)n^a}$.

1) Montrer qu'on définit ainsi une loi de probabilité.
2) A quelle condition X admet-elle une espérance finie ? La calculer. En donner un équivalent quand $a \to +\infty$.
3) Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on note A_m l'ensemble des multiples non nuls de m. Calculer $\mathbb{P}(X \in A_m)$.
4) Soit $(m_1, ..., m_k)$ une famille d'entiers. A quelle condition les évènements $A_{m_1}, ..., A_{m_k}$ sont-ils mutuellement indépendants pour la loi de X ?
5) On note p_j le j-ème nombre premier et $C_n = \{i \in \mathbb{N}^* | \forall j \in [\![1, n]\!], i \notin A_{p_j}\}$. Calculer $\mathbb{P}(X \in C_n)$. Que dire quand $n \to \infty$?

Exercice I.19: *(Mines 2015)*

Soient n couples de danseurs. Lorsque la musique change, les membres des couples doivent trouver un nouveau partenaire du sexe opposé. Déterminer la probabilité que tous les couples nouvellement formés soient différents des couples initiaux. Limite quand $n \to \infty$?

Exercice I.20: *(Mines 2015)*

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Donner la loi de $|X-Y|$.

Exercice I.21: *(Mines 2015)*

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi de Bernouilli de paramètre $p \in]0,1[$. On pose pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $Y_k = X_k + X_{k+1}$.

1) Loi, espérance et variance de Y_k.
2) Calculer $\mathrm{cov}(Y_i, Y_j)$ pour $i \neq j$.
3) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$. Calculer $\mathbb{E}(T_n)$ et $\mathbb{V}(T_n)$.

Exercice I.22: *(Mines 2015)*

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ. On définit la variable aléatoire Y par $Y = X/2$ si X est paire, 0 sinon. Loi, espérance et variance de Y ?

Exercice I.23: *(Mines 2015)*

On lance trois dés non pipés et on note a, b, c les résultats obtenus. Calculer la probabilité que le trinôme $aX^2 + bX + c$ ait deux racines rationnelles distinctes. Question préliminaire : montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$ ssi n est un carré d'entier.

Exercice I.24: *(Mines 2015)*

Pour tout $s \in \mathbb{N}^*$, soit la fonction f_s définie là où cela a un sens par

$$f_s(x) = \sum_{n=s}^{+\infty} \binom{n}{s} x^{n-s}$$

1) Rayon de convergence et calcul de f_s.
2) On dispose d'une urne remplie de boules blanches et rouges. On procède à des tirages avec remise. On tire une blanche avec probabilité p. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et X la variable aléatoire donnant le temps d'apparition de la r-ieme boule blanche. Déterminer la loi de X. Calculer sa fonction génératrice, son espérance et sa variance.

Exercice I.25: *(Mines 2015)*

Une urne contient des boules blanches et des boules noires. On effectue des tirages avec remise. La probabilité de tirer une boule blanche est p, celle de tirer une noire est $q = 1-p$. Soit $r \in \mathbb{N}^*$: on définit X_r comme la variable aléatoire qui vaut n si la r-ième boule blanche apparaît au n-ième tirage.

1) Donner la loi de X_1, X_2, X_3 puis X_r pour r quelconque.
2) Donner l'espérance de X.
3) On écrit $\mathcal{G}_{X_r}(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^n$. Trouver le rayon de convergence de cette série entière.
4) Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n : en déduire une équation différentielle vérifiée par $\mathcal{G}$ et la résoudre.

Exercice I.26: *(Mines 2015)*

On considère une urne contenant une proportion p de boules noires et $1-p$ de boules blanches. On effectue des tirages successifs avec remise. Soit X la longueur de la première suite de boules de même couleur, Y la longueur de la deuxième.

1) Déterminer la loi conjointe de (X, Y).
2) En déduire la loi de X. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$. Vérifier rapidement que $\mathbb{E}(X) \geq 2$.
3) Idem pour Y.

4) Les deux variables sont-elles indépendantes ?

Exercice I.27: *(? ? 2015)*

On lance une pièce de monnaie équilibrée jusqu'à obtenir la séquence pile-face. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de lancers effectués. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice I.28: *(? ? 2015)*

1) Montrer que tout entier $n \in \mathbb{N}$ peut s'écrire d'une unique façon $n = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k 2^k$ avec $\varepsilon_k \in \{0, 1\}$ pour tout k.

2) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$. On suppose que $X = \sum_{n=0}^{+\infty} X_n 2^n$ où les X_n sont des variables de Bernouilli. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$.

Exercice I.29: *(? ? 2015)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit les $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ comme les coefficients du polynôme $X(X+1)...(X+n-1) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} X^k$

1) Montrer que $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$.

2) On admet que $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ est le nombre de permutations de $[\![1, n]\!]$ dont la décomposition en cycles à supports disjoints comporte k cycles. On munit l'ensemble $\Omega = \mathfrak{S}_n$ de la loi uniforme. Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $X(\sigma)$ le nombre de cycles de σ. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

3) Justifier le fait admis en prouvant que la relation de récurrence vérifiée par la suite double $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ est cohérente avec cette interprétation.

Exercice I.30: *(? ? 2015)*

Soit Ω un univers fini muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. Si X est une variable aléatoire réelle, on dit que X est symétrique si X et $-X$ suivent la même loi.

1) Soient Y et Y' deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi. Montrer que $Y - Y'$ est symétrique.

2) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Soit $f_X : t \mapsto \mathbb{E}(\mathrm{e}^{itX})$. Montrer que f_X détermine entièrement la loi de X. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f_X pour que X soit symétrique.

Exercice I.31: *(? ? 2015)*

1) Soient p et q deux entiers. Montrer $\sum_{k=p}^{q} \binom{k}{p} = \binom{q+1}{p+1}$.

2) Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On retire une à une et sans remise les boules de l'urne. Soit X la variable aléatoire indiquant le nombr de tirages effectués jusqu'au retrait de toutes les boules blanches. Déterminer la loi de X.

3) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Centrale - Supélec

Exercice I.32: *(Centrale 2015)*

On considère un pin qui se déplace sur une demi-droite. Le i-ème pas est donné par une variable Y_i à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Le pion est initialement à la case 0 et on suppose que les Y_i suivent la même loi et sont indépendantes entre elles. On pose alors $S_n = Y_1 + ... + Y_n$ qui représente la position du pion après $n \in \mathbb{N}^*$ pas, avec par convention $S_0 = 0$.

On note $f_k = \mathbb{P}(Y_1 = k)$ et $f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(t)$.

1) Dans cette question, on considère que $Y_i - 1$ suit une loi de Bernouilli de paramètre p.
   (a) Ecrire une fonction Python qui pour k et p donnés itère l'avancement jusqu'à atteindre ou dépasser la k-ième case. Elle renvoie 1 si le pion arrive exactement sur cette case et 0 sinon.
   (b) Pour une centaine d'essais avec une valeur de k assez grande et des valeurs de p de votre choix, calculer le rapport entre le nombre de fois où le pion arrive sur la k-ième case et le nombre total d'essais. Comparer à $1/\mathbb{E}(Y_i)$.
2) On revient au cas général. On pose $E_k = \bigcup_{n=0}^{+\infty} [S_n = k]$ et $u_k = \mathbb{P}(E_k)$.
   (a) Pour $j \in [\![1, k]\!]$, montrer que $\mathbb{P}(E_k \cap [Y_1 = j]) = f_j u_{k-j}$.
   (b) En déduire que $u_k = u_0 f_k + u_1 f_{k-1} + ... + u_{k-1} f_1$.
3) On pose $u(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k t^k$.

   Après avoir justifié que u est bien définie sur $]-1, 1[$, montrer que $u = \dfrac{1}{1-f}$.
4) Donner l'expression de u et des u_k en fonction de k, ainsi que de $\lim\limits_{k\to\infty} u_k$ pour les cas suivants :
   (a) les Y_i suivent la loi géométrique de paramètre p
   (b) les $Y_i - 1$ suivent la loi de Bernouilli de paramètre p

   Que peut-on dire par rapport à $\mathbb{E}(Y_i)$?

Exercice I.33: *(Centrale 2015)*

Polynômes de Bernstein et Théorème de Weierstrass par la méthode probabiliste (voir les épreuves écrites)

Exercice I.34: *(Centrale 2015)*

Soit Y une variable aléatoire discrète telle que $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Montrer que Y admet une espérance si et seulement si $\sum \mathbb{P}(Y \geq n)$ converge, et que dans ce cas $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y \geq k) = \mathbb{E}(Y)$.

Exercice I.35: *(Centrale 2015)*

Soit X une variable aléatoire admettant une variance et telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X < k)$.

Montrer que $S_n \underset{n\to\infty}{\sim} n$ et préciser cette propriété asymptotique.

Exercice I.36: *(Centrale 2015)*

On dispose de deux urnes A et B : la première contient des boules blanches et noires en proportions respectives p et $1-p$, la seconde 10 boules numérotées de 0 à 9. Une expérience aléatoire $\omega \in \Omega$ se déroule de la façon suivante : on tire des boules dans l'urne A jusqu'à obtenir une blanche, $N(\omega)$ est le nombre de tirages nécessaires. Puis on tire $N(\omega)$ boules dans l'urne B, le numéro de chaque boule étant donné par $Y_i(\omega)$ pour $i \in [\![1, N(\omega)]\!]$. On définit la variable aléatoire

$$X = \sum_{i=1}^{N(\omega)} \frac{Y_i(\omega)}{10^i}$$

1) Reconnaître la loi de la variable N, donner son espérance et sa variance.
2) Montrer que X est d'espérance finie et calculer $\mathbb{E}(X)$.
3) Soit F_X la fonction qui à $t \in [0, 1[$ associe $\mathbb{P}(X \leq t)$. Etudier sa continuité.

Exercice I.37: *(Centrale 2015)*

Au rez-de-chaussée d'un immeuble à n étages, k personnes montent dans l'ascenseur et descendent à un étage au hasard de façon indépendante. On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'arrêts de l'ascenseur.

1) Ecrire une fonction Python qui simule la variable aléatoire X.
2) On note X_i ($i \in [\![1, n]\!]$) la variable aléatoire qui vaut 1 si l'ascenseur s'arrête à l'étage i, 0 sinon.
   (a) Donner la loi des X_i.
   (b) Donner l'expression de X en fonction des X_i.
   (c) En déduire $\mathbb{E}(X)$.
   (d) Pour n variant de 3 à 20 et avec $k = 10$, vérifier informatiquement le résultat sur 1000 répétitions de l'expérience.

Exercice I.38: *(Centrale 2015)*

Trois joueurs A, B, C se passent un ballon. On note A_n l'évènement "le joueur A a la balle après n passes". On a les probabilités de passes suivantes :
$\mathbb{P}(A \to B) = 1/3, \mathbb{P}(A \to C) = 2/3, \mathbb{P}(B \to A) = 1/3, \mathbb{P}(B \to C) = 2/3, \mathbb{P}(C \to B) = 1/3, \mathbb{P}(C \to C) = 2/3.$
On note $X_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(A_n) \\ \mathbb{P}(B_n) \\ \mathbb{P}(C_n) \end{pmatrix}$

1) Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = MX_n$ pour tout n
2) Trouver la limite de (X_n).

Exercice I.39: *(Centrale 2015)*

On note $\mathbb{H} = \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$. Soient X et Y deux variables aléatoires telles que l'on ait $\forall (p, q) \in \mathbb{H}^2$, $\mathbb{P}(X = p, Y = q) = \dfrac{\alpha}{p^q}$.

1) (a) Donner la loi marginale de X.
   (b) Calculer $r_n = \displaystyle\sum_{p=2}^{n} \mathbb{P}(X = p)$.
   (c) En déduire la valeur de α.
   (d) X admet-elle une espérance ?
   (e) Donner une approximation décimale correcte de $\mathbb{P}(X = Y)$.
2) (a) A l'aide de Python, programmer et tester une fonction `f(x)` qui à $x \in]0, 1[$ associe l'unique entier n tel que $r_{n-1} \leq x < r_n$.
   (b) On définit $S_{p,q} = \displaystyle\sum_{i=2}^{q} \frac{1}{p^i}$. Programmer et tester une fonction `g(y)` qui, étant donné $y \in \mathbb{R}$ et $p = f(y)$, renvoie l'entier $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $S_{p,q-1} \leq y - r_{p-1} < S_{p,q}$.
3) Proposer une procédure informatique permettant de simuler les variables aléatoires X et Y. On donne la fonction `random()` qui renvoie un réel choisi uniformément dans $[0, 1[$.

Exercice I.40: *(Centrale 2015)*

Dans le cadre d'un jeu regroupant n joueurs $J_1, ..., J_n$, on effectue N lancers de pile ou face avec une pièce équilibrée. Chaque joueur fait des prédictions sur le résultat des lancers (par exemple PFP pour $N = 3$). Le nombre de prédictions justes est donné pour chaque joueur par les variables aléatoires $X_1, ..., X_n$. Les gagnants sont les joueurs ayant réalisé le plus de prédictions justes : ils se partagent alors la somme S. Les gains de chaque joueur sont donnés par les variables aléatoires $G_1, ..., G_n$.

1) On suppose que les $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont indépendantes et suivent la même loi.
   (a) Justifier que les $(G_i)_{1 \leq i \leq n}$ suivent la même loi, que l'on ne demande pas d'exprimer.
   (b) Montrer que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{E}(G_i) = \dfrac{S}{n}$.
2) Créer une fonction Python prenant n, N et S en arguments, qui simule une partie et renvoie le gain de chaque joueur. Calculer le gain moyen sur un grand nombre de parties.
3) J_1 et J_2 suivent maintenant une stratégie différente : ils font des prédictions opposées (exemple : PFP et FPF pour $N = 3$). Les autres joueurs ne changent pas de stratégie.
   On suppose la mutuelle indépendance de $X_1, X_3, ..., X_n$ ainsi que celle de $X_2, X_3, ..., X_n$. On note $G' = G_1 + G_2$ et $Y = \max\{X_1, X_2\}$.
   (a) Montrer que les X_i suivent la même loi, que l'on précisera. On note alors $q_k = \mathbb{P}(X_i = k)$ et $r_k = \mathbb{P}(X_i \leq k)$.
   (b) On suppose dans toute la suite de la question 3) N impair, avec $N = 2p + 1$. Trouver le domaine V des valeurs prises par Y.
   (c) Soient $k \in V$ et $j \in [\![1, n-1]\!]$. Exprimer $\mathbb{P}(G' = S/j, Y = k)$ en fonction de q_k et r_{k-1}.
   (d) Calculer $\mathbb{E}(G')$ puis $\mathbb{E}(G_1)$ et $\mathbb{E}(G_2)$. La stratégie adoptée par J_1 et J_2 est-elle efficace ?
4) On suppose maintenant N pair : la stratégie est-elle efficace ?
5) Reprendre la question 2) avec cette nouvelle stratégie. On pourra utiliser la fonction `factorial`.

Exercice I.41: *(Centrale 2015)*

Soient n régions du plan, que l'on colorie avec $m > n$ crayons de couleurs différentes, de manière aléatoire.

1) Quelle est la probabilité d'avoir au moins trois régions de même couleur ? Trois régions de couleurs différentes ?
2) Calculer la probabilité $P_{n,p}(k)$ d'avoir k couleurs différentes dans les cas $k = 1, 2, n$.
3) Soit $S_{n,k}$ le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments vers un ensemble à k éléments.
   (a) Trouver un réel $a(n, k)$ tel que $S_{n,k} = a(n, k)(S_{n-1,k} + S_{n-1,k-1})$.
   (b) Ecrire une fonction Python qui renvoie $S_{n,k}$: la tester pour $n = 3$ et $k = 2$.
   (c) Lien entre $S_{n,k}$ et $P_{n,p}(k)$?

Exercice I.42: *(Centrale 2015)*

On considère un tournoi auquel n joueurs participent. Les règles ne sont pas spécifiées, on sait juste que les variables aléatoires $X_{k,n}$ donnant les nombres de points respectifs des joueurs $k \in [\![1, n]\!]$ sont indépendantes et de même loi que la variable X. Celui qui a le plus de points gagne, on note V_n l'évènement "il n'y a qu'un seul vainqueur". Soit pour $t \in \mathbb{R}_+$, $F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$.

1) Montrer que
$$\mathbb{P}(V_n) = n \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k + 1) F(k)^{n-1}$$
2) Si X suit la loi uniforme sur $[\![0, m]\!]$, trouver $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{P}(V_n)$
3) Si $X(\Omega)$ est fini, trouver $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{P}(V_n)$

Exercice I.43: *(Centrale 2015)*

1) Montrer que la somme de n variables de Bernouilli de paramètre p mutuellement indépendantes suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.
2) Soit U,V couple de variables aléatoires indépendantes suivant chacune $\mathcal{B}(2,\dfrac{1}{2})$. On pose $S=(U-1)^2+(V-1)^2$. Trouver la loi de S. Calculer l'écart-type de S^2.
3) Soit $T=(U-1)(V-1)+1$. Calculer $\mathbb{E}(S(T-1))$. Trouver la loi de T. Calculer $\mathrm{Cov}(S,T)$. Trouver la loi de (S,T). Les deux variables sont-elles indépendantes ?

Exercice I.44: *(Centrale 2015)*

1) Ecrire une fonction PYTHON qui à une permutation (représentée par une liste) associe son nombre de points fixes.
2) Ecrire une fonction qui à un entier n associe la moyenne sur tous les éléments de $\mathfrak{S}_n$ du nombre de points fixes. Que remarque-t-on ? Le démontrer.
3) Pour $k\in\mathbb{N}$ on note D_k le nombre d'éléments de $\mathfrak{S}_k$ sans points fixes. Montrer que
$$n! = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_k$$
4) En déduire que
$$D_n = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$
5) Montrer que D_n est l'entier le plus proche de $n!e^{-1}$.

Exercice I.45: *(Centrale 2015)*

On considère $n\geq 2$ joueurs numérotés de 1 à n, participant à un tournoi où chacun affronte tous les autres, sans égalité possible dans une rencontre.

On définit la matrice aléatoire $A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ par $\begin{cases}0 & \text{si } i=j\\ 1 & \text{si } i \text{ a gagné contre } j\\ 0 & \text{si } j \text{ a gagné contre } i\end{cases}$

1) Ecrire une fonction PYTHON renvoyant une matrice de tournoi aléatoire.
2) Calculer les déterminants de telles matrices pour des entiers pairs et impairs grâce à PYTHON. Que constate-t-on ?
3) Démontrer la propriété postulée pour les n impairs.
4) (a) Soit $J_n=(1)_{1\leq i,j\leq n}$. Calculer $\det(J_n-I_n)$.
   (b) Soient M et N deux matrices à coefficients entiers telles que $M-N$ ait tous ses coefficients pairs. Montrer que $\det M$ et $\det N$ ont même parité.
   (c) Démontrer la propriété postulée pour les n pairs.

Exercice I.46: *(Centrale 2015)*

Soit $(\Omega,\mathcal{T},\mathbb{P})$ un espace probabilité, X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de X, et N une variable aléatoire indépendante des X_n et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On définit $S:\omega\in\Omega\mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega)$.

1) Justifier que S est une variable aléatoire.
2) Soient $\mathcal{G}_X$, $\mathcal{G}_S$, $\mathcal{G}_N$ les séries génératrices respectives de X,S,N.
   Montrer que $\forall t\in[0,1]$, $\mathcal{G}_S(t)=\mathcal{G}_N\circ\mathcal{G}_X(t)$.
3) (a) On suppose que X et N possèdent une espérance. Montrer que S possède une espérance et calculer $\mathbb{E}(S)$.

(b) On suppose que X et N possèdent un moment d'ordre 2. Montrer que S possède un moment d'ordre 2 et calculer $\mathbb{E}(S^2)$.

4) On étudie la transmission du nom de famille au cours des générations dans une société patriarcale. On suppose que le nombre de descendants masculins d'un individu suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in]0,+\infty[$. On note Z_0 le nombre d'individus masculins au début de l'étude, Z_n le nombre de descendants à la n-ème génération. On suppose $Z_0 = 1$.

(a) Ecrire une fonction Python renvoyant le nombre de descendants masculins à la n-ème génération.

(b) On fixe λ et n. Calculer une moyenne, sur un grand nombre de mesures, de ce nombre. Comparer à $\mathbb{E}(Z_n)$.

Exercice I.47: *(Centrale 2015)*

On dispose de n urnes et de $N = na$ boules blanches, où $a \in \mathbb{N}^*$. Ces boules sont réparties de façon indépendante et équiprobable entre les urnes. On note Y_n la variable aléatoire donnant le nombre d'urnes vides et $S_n = Y_n/n$.

1) Enoncer et démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

2) Calculer $\mathbb{E}(S_n)$. On pourra considérer les variables de Bernouilli X_i qui valent 1 si l'urne i est vide.

3) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|S_n - \mathrm{e}^{-a}| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Exercice I.48: *(Centrale 2015)*

1) (a) Ecrire en Python une fonction `S(n,p)` qui simule une variable aléatoire $S_n = Y/n$ où $Y \sim \mathcal{B}(n,p)$.

(b) Ecrire en Python une fonction `test(n,p)` interpolant les points (k, S_k) puis $\left(k, p + \sqrt{\dfrac{\ln k}{k}}\right)$ et $\left(k, p - \sqrt{\dfrac{\ln k}{k}}\right)$. Que remarque-t-on ?

2) (a) Pour t réel et $x \in [-1,1]$, montrer que $\mathrm{e}^{tx} \leq \dfrac{1-x}{2}\mathrm{e}^{-t} + \dfrac{1+x}{2}\mathrm{e}^{t}$

(b) Soit X une variable aléatoire centrée telle que $|X| \geq 1$.
Montrer que pour tout t, la variable e^{tX} est d'expérance finie, et que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX}) \leq \mathrm{ch}(t) \leq \exp(t^2/2)$

3) Soient $(X_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes centrées et bornées. On note $c_i = \|X_i\|_\infty$ et $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^n X_i$

(a) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tS_n}) \leq \exp\left[\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^n c_i^2\right]$$

(b) Montrer que pour tout $\alpha > 0$,

$$\mathbb{P}(S_n > \alpha) \leq \exp\left[-t\alpha + \frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^n c_i^2\right]$$

(c) En déduire que

$$\mathbb{P}(S_n > \alpha) \leq \exp\left[-\frac{\alpha^2}{2\sum_{i=1}^n c_i^2}\right]$$

Puis que

$$\mathbb{P}(|S_n| > \alpha) \leq 2\exp\left[-\frac{\alpha^2}{2\sum_{i=1}^n c_i^2}\right]$$

(d) Commenter le résultat observé à la première question.

Exercice I.49: *(Centrale 2014)*

Pour n et m dans $\mathbb{N}^*$, on note $s_{m,n}$ le nombre de surjections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,m]\!]$.

On définit $S_m : z \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s_{m,n}}{n!} z^n$.

1) Que vaut $s_{m,n}$ si $n < m$? Trouver un majorant simple de $s_{m,n}$ dans le cas général et en déduire que le rayon de convergence de S_m est $+\infty$.
2) Montrer que pour tout $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2*$, $s_{m+1,n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} s_{m,n-k}$.
3) En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $m \in \mathbb{N}^*$, $S_m(z) = (\mathrm{e}^z - 1)^m$.
4) Ecrire une procédure pour calculer $s_{m,n}$ sur Python. Calculer $s_{50,20}$.

Exercice I.50: *(ENSEA 2015)*

1) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Donner le développement en série entière de $x \in]-1,1[\mapsto \dfrac{1}{(1-x)^{N+1}}$.
2) Soit X une variable aléatoire de loi de probabilité $\forall k \geq N$, $\mathbb{P}(X = k) = \dbinom{k-1}{N-1} p^N (1-p)^{k-N}$.

   Déterminer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice I.51: *(ENSEA 2015)*

Deux joueurs A et B jouent simultanément à pile ou face. On note p la probabilité que la pièce donne pile, et $q = 1 - p$. Lorsqu'un joueur fait pile, il s'arrête et l'autre continue jusqu'à obtenir pile également. On note X et Y les variables aléatoires qui comptent le nombre de face avant d'obtenir pile pour chacun des deux joueurs.

1) Quelle est la loi de X ?
2) Donner la loi de $S = X + Y$.
3) *Deux autres questions non traitées*

Mines-Telecom / TPE - EIVP

Exercice I.52: *(CCE Mines 2015)*

On considère une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 1$, et Y prenant les valeurs 1 et 2 avec probabilité 1/2. On note $Z = X + Y$: trouver la loi de Z, son espérance et sa variance.

Exercice I.53: *(CCE Mines 2015)*

On considère un péage composé de m guichets. On note N la variable aléatoire donnant le nombre de voitures utilisant le péage en une heure : elle suite une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Le choix du guichet se fait de manière aléatoire et indépendante des autres voitures. On note X la variable aléatoire égale au nombre de voitures ayant pris le guichet 1.

1) Calculer $\mathbb{P}(X = k | N = n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![1,n]\!]$.
2) Montrer que $\mathbb{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \left(\dfrac{\lambda}{m}\right)^k frac1k! \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n$.
3) Donner la loi de X.
4) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Exercice I.54: *(CCE Mines 2015)*

Soit $p \in]0,1[$. On admet que pour $m \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k \geq m} \binom{k}{m} p^{k-m}$ converge et vaut $\dfrac{1}{(1-p)^{m+1}}$.

On place une bactérie dans une enceinte fermée à $t = 0$. Toutes les secondes à partir de $t = 1$s, on envoie un tir de laser dans l'enceinte. Chaque tir est indépendant du précédent et la probabilité du laser de toucher la bactérie est égale à p. La bactérie ne peut encaisser que r tirs de laser, avec $r \in \mathbb{N}^*$.

Soit X la variable aléatoire donnant la durée de vie de la bactérie dans l'enceinte.

1) Donner la loi de X.
2) Calculer son espérance.

Exercice I.55: *(TPE - EIVP 2015)*

Soient X, Y deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2. Montrer que $\mathrm{cov}(X,Y) \leq \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)$ et caractériser le cas d'égalité.

Exercice I.56: *(TPE - EIVP 2015)*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère que la probabilité de tirer l'entier n est 2^{-n}.

1) Justifier qu'on définit bien ainsi une probabilité sur $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$.
2) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note A_k l'évènement {l'entier tiré est un multiple de k}. Exprimer $\mathbb{P}(A_k)$ en fonction de k.
3) Calculer $\mathbb{P}(A_2 \cup A_3)$.
4) On note B l'évènement {l'entier tiré est un nombre premier}. Montrer que $\dfrac{13}{52} < \mathbb{P}(B) < \dfrac{209}{504}$.

Exercice I.57: *(TPE - EIVP 2015)*

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{k-1}{2^k}$.

1) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$.
2) Donner la fonction génératrice de X et son rayon de convergence.
3) X admet-elle une espérance finie ? Si oui quelle est-elle ?

Exercice I.58: *(Telecom SudParis 2015)*

On considère une expérience de Bernouilli avec comme probabilité de succès p et comme probabilité d'échec $1-p$. On répète cette expérience une infinité de fois. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre d'expériences nécessaires pour obtenir deux succès.

1) Déterminer la loi de X et son espérance.
2) On joue au loto avec 1 chance sur 1000 de gagner. Combien de fois en moyenne doit-on jouer pour pouvoir gagner 2 fois ?

CCP / Arts et Métiers

Exercice I.59: *(CCP 2015)*

On possède une urne contenant $n-1$ boules noires et une boule blanche. On procède à un tirage sans remise. On note X le rang d'apparition de la boule blanche, Y le nombre de boules noires restant dans l'urne après ce tirage.

1) Donner la loi de X, son espérance et sa variance (si elles existent).
2) Exprimer Y en fonction de X, en déduire son espérance et sa variance (si elles existent).

Exercice I.60: *(CCP 2015)*

Il s'agit d'un jeu consistant à tirer un nombre dans $\mathbb{N}^*$, avec $p_n = 2^{-n}$. Si ce nombre est pair, le joueur gagne n euros, s'il est impair le joueur perd n euros. On note G la variable aléatoire correspondant au gain du joueur.

1) Calculer $\mathbb{P}(G \geq 0)$.
2) Déterminer $\mathbb{E}(G)$ et $\mathbb{V}(G)$.

Exercice I.61: *(CCP 2015)*

On dispose de 9 jetons numérotés de 1 à 9. On considère une matrice carrée de taille 3×3 constituée de ces 9 jetons. On cherche à déterminer la probabilité pour que le déterminant de cette matrice soit impair.

1) Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ avec $n \geq 2$. Soit $R = (r_{i,j})$ où $r_{i,j}$ est le reste dans la division euclidienne de $a_{i,j}$ par 2. Montrer que $\det A \equiv \det R$ [2].
2) On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 composées des 9 jetons. Déterminer $\mathrm{card}(\mathcal{M})$.
3) On note $\Omega = \{M \in \mathcal{M}, \det(M) \text{ impair}\}$ et Δ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 dont 5 coefficients sont égaux à 1, 4 coefficients sont nuls et le déterminant est impair. Donner une relation entre $\mathrm{card}(\Omega)$ et $\mathrm{card}(\Delta)$.
4) Détermination de $\mathrm{card}(\Delta)$.
   (a) On considère l'ensemble des matrices de Δ dont une colonne possède 3 coefficients égaux à 1. Donner le nombre K_1 de telles matrices.
   (b) On considère l'ensemble des matrices de Δ dont 2 colonnes possèdent exactement un coefficient nul. Donner le nombre K_2 de telles matrices.
   (c) Calculer $\mathrm{card}(\Delta)$.
5) En déduire la probabilité recherchée.

Exercice I.62: *(CCP 2015)*

Un secrétaire effectue des appels téléphoniques vers n correspondants, chacun étant atteint avec une probabilité p. On note X le nombre de correspondants qu'il réussit à joindre.

1) Donner la loi de X.
2) Le secrétaire rappelle les $n - X$ correspondant non joints, et parvient à parler à Y d'entre eux.
   (a) Déterminer $\mathbb{P}(Y = k | X = i)$.
   (b) Montrer que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
   (c) Calculer $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathbb{V}(Z)$.

Exercice I.63: *(CCP 2015)*

1) Enoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2) Soit (Y_i) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi, admettant toutes un moment d'ordre 2. On note $S_n = Y_1 + ... + Y_n$.
   Montrer que pour tout $\alpha > 0$, $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(Y_1)\right| \geq \alpha\right) \leq \frac{\mathbb{V}(Y_1)}{n\alpha^2}$.
3) Application : on tire avec remise une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. Combien de tirages faut-il pour être sûr à 95% d'avoir une proportion de boules rouges comprise entre 0.35 et 0.45 ?

Exercice I.64: *(CCP 2015)*

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) = \dfrac{a}{n(n+1)}$.

1) Déterminer a.
2) X admet-elle une espérance ? une variance ?
3) Expliciter la série génératrice de X.

Exercice I.65: *(Arts et Métiers 2015)*

On a n jetons ayant chacun une face bleue et une face blanche, posés au fond d'une boîte. Au départ il y en a b dont la face bleue est visible. A chaque tour on choisit un premier jeton (au hasard) puis un autre (sans remise, toujours au hasard). Si le deuxième jeton est d'une couleur différente de celle du premier, on le retourne. Soit X_k la variable aléatoire qui compte le nombre de jetons bleus après le k-ième tour.

1) (a) Ecrire en PYTHON un programme qui, en fonction de n, k, b, retourne X_k.

(b) Exécuter 100 fois le programme pour des valeurs des paramètres entre 2 et 10. Faire un graphique.

(c) Diagonaliser la matrice A.

2) (a) On considère la situation précédente avec $n = 4$ et on note Y_k le vecteur ${}^t(\mathbb{P}(X_k = 0), \mathbb{P}(X_k = 1), \mathbb{P}(X_k = 2), \mathbb{P}(X_k = 3), \mathbb{P}(X_k = 4))$.

(b) Donner la matrice A telle que $Y_{k+1} = AY_k$

(c) Déterminer la limite de (A^k)

(d) En déduire la limite de $\mathbb{P}(X_k = i)$ pour $i \in [\![0, 4]\!]$.

Exercices classés par thèmes

Dénombrements et espaces probabilisés

Exercice II.1: *Un peu de rangement*

Pour n et r deux entiers > 1 fixés, considérons l'équation à r inconnues $x_1 + x_2 + ... + x_r = n$.
Une solution de cette équation est un r-uplet $(x_1, ..., x_r)$ d'entiers.

1) Justifier que le nombre de solutions à composantes strictement positives est $\binom{n-1}{r-1}$. Pour cela, s'aider de l'analogie suivante : on cherche à répartir n billes identiques dans r boîtes disposées en file indienne. On verse d'abord toutes celles qu'on veut dans la première boîte, puis on passe à la suivante, etc. Pour connaître le nombre de billes dans chaque boîte, que suffit-il de déterminer ?
2) Montrer que le nombre de solutions à composantes positives ou nulles est $\binom{n+r-1}{r-1}$. On se ramènera au cas précédent.

Exercice II.2:

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![1, n]\!]$, $a_{n,k}$ le nombre de sous-ensembles à k éléments de $[\![1, n]\!]$ ne contenant pas deux entiers consécutifs. On note b_n le nombre de sous-ensembles de $[\![1, n]\!]$ ne contenant pas deux entiers consécutifs.

1) Déterminer $a_{n,k}$.
2) Exprimer b_n à l'aide de nombres de Fibonacci.
3) En déduire une expression du n-ième nombre de Fibonacci à l'aide d'une somme de coefficients binomiaux.

Exercice II.3: *Trousseau de clefs* On dispose d'un trousseau de n clés, une seule d'entre elles pouvant ouvrir la porte de l'appartement.

1) On essaie une clé au hasard, puis on recommence tant qu'on n'a pas trouvé la bonne clé. Les essais étant supposés indépendants et le choix d'une clé à chaque essai étant supposé uniforme, déterminer la probabilité qu'on trouve la bonne clé au k-ème essai et la probabilité qu'on ne trouve jamais la bonne clé.
2) Mêmes questions mais en supposant qu'à chaque nouvel essai on choisit uniformément une clé autre que celle que l'on vient d'essayer.
3) Mêmes questions mais en supposant qu'à chaque nouvel essai on choisit uniformément une clé autre que toutes celles que l'on a déjà essayées.

Exercice II.4: *Formule de Poincaré*

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une famille d'évènements. Montrer par récurrence la formule

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1<...<i_k\leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k})$$

Exercice II.5: *(Nombre de surjections)*

Soient $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ et soit $s(n, k)$ le nombre d'applications surjectives de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, k]\!]$. Soit, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $E_i = \{f : [\![1, n]\!] \to [\![1, k]\!], i \notin \text{Im }(f)\}$

1) Soient $l \in [\![1, k]\!]$ et $1 \leq i_1 < ... < i_l \leq k$. Déterminer le cardinal de $E_{i_1} \cap ... \cap E_{i_l}$.

2) En déduire que $s(n,k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n$.

   On pourra utiliser la formule de Poincaré (4).

3) Justifier que $s(n,k) = k(s(n-1,k) + s(n-1,k-1))$.

Exercice II.6: *Pile ou face, épisode 1*

On lance une infinité de fois une pièce, et on note A_k l'évènement { au cours des k premiers lancers, pile n'est jamais apparu 3 fois de suite }, avec la convention $A_0 = \Omega$.

1) En supposant les lancers mutuellement indépendants et la pièce équilibrée, montrer que pour $k \geq 3$:

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(A_{k-1}) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(A_{k-2}) + \frac{1}{8}\mathbb{P}(A_{k-3})$$

2) On note α, β, γ les racines complexes de $X^3 - X^2/2 - X/4 - 1/8$. Montrer que $\max(|\alpha|, |\beta|, |\gamma|) < 1$ et en déduire $\mathbb{P}(A_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

3) Soit S une séquence finie de $\{0,1\}^n$.
   (a) Montrer qu'il est presque certain que S apparaît au moins une fois dans la succession de lancers.
   (b) Montrer qu'il est presque certain qu'elle apparaît une infinité de fois.
   (c) Montrer que cela reste vrai si la pièce est pipée, tant qu'elle peut tomber des deux côtés.

Exercice II.7: *Suites de fonctions*

On se donne un ensemble Ω et on considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Ω dans $\mathbb{R}$.
On pose, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'évènement $A_{\varepsilon,k} = \{\omega \in \Omega, |f_k(\omega)| < \varepsilon\}$.

1) On fixe $\varepsilon > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, écrire à l'aide d'opérations ensemblistes sur les $A_{\varepsilon,k}$ l'ensemble $B_{\varepsilon,n} = \{\omega \in \Omega, \forall k \geq n, |f_k(\omega)| < \varepsilon\}$

2) Même question pour $C_\varepsilon = \{\omega \in \Omega, \exists n(\omega) \in \mathbb{N}^*, \forall k \geq n, |f_k(\omega)| < \varepsilon\}$

3) Conclure que l'ensemble $D = \{\omega \in \Omega, f_k(\omega) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\}$ peut s'écrire à l'aide d'opérations ensemblistes sur une suite d'ensembles du type $A_{\varepsilon,k}$.

Exercice II.8:

On lance n dés. Soit $A_n = \{$le total des numéros est pair$\}$. Calculer $\mathbb{P}(A_n)$.

Exercice II.9: *Inégalité de Bonferroni*

1) Montrer que pour tous évènements A et B, $\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$

2) Généraliser : pour tous évènements $A_1, ..., A_n$, montrer que $\mathbb{P}(A_1 \cap ... \cap A_n) \geq \mathbb{P}(A_1) + ... + \mathbb{P}(A_n) - (n-1)$

Exercice II.10: *Permutation aléatoire : génération*

On veut tirer au hasard une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ des n premiers entiers, et on envisage les deux méthodes suivantes :

1) On fixe un entier N et on tire au hasard $2N$ entiers $i_1, j_1, i_2, j_2, ..., i_N, j_N$ de manière uniforme et mutuellement indépendante dans $[\![1,n]\!]$. On calcule alors $\sigma = (i_1\ j_1) \circ \cdots \circ (i_N\ j_N)$.
   (a) Comment faut-il choisir N pour être sûr de pouvoir obtenir toutes les permutations de $[\![1,n]\!]$?
   (b) La permutation ainsi construite est-elle uniformément distribuée ?

2) On tire de manière uniforme et mutuellement indépendante des entiers $k_1 \in [\![0,1]\!]$, $k_2 \in [\![0,2]\!]$, ..., $k_n \in [\![0,n-1]\!]$ et on calcule $\sigma = (1\ 2)^{k_1} \circ (1\ 2\ 3)^{k_2} \circ \cdots \circ (1\ 2\ 3\ \cdots\ n)^{k_n}$. Peut-on obtenir ainsi toutes les permutations ? Sont-elles équiprobables ?

Exercice II.11: *Permutation aléatoire : longueur des cycles*

Au soir du 24 décembre, le Père Fouettard fait prisonniers les 100 lutins du Père Noël dans ses cachots. Chaque cachot donne sur un couloir qui mène à une grande pièce où sont alignées 100 boîtes.

Sur chaque boîte, le nom d'un des lutins est écrit. Dans chaque boîte, il y a un papier avec un deuxième nom, pas forcément le même. Chaque nom est présent exactement une fois sur un couvercle et une fois sur une étiquette à l'intérieur.

Les lutins sont appelés successivement, et chacun a le droit d'ouvrir 50 boîtes à la suite. S'il trouve son propre nom parmi les étiquettes découvertes, il est libéré, sinon il reste en prison et les enfants n'auront pas de cadeaux. Les lutins n'ont pas le droit de communiquer entre eux, et ne savent pas ce qu'il y a dans une boîte avant de l'ouvrir. Proposer une stratégie qui assure que toute l'équipe du Père Noël ait au moins 30% de chances d'être délivrée (alors que si chacun ouvre 50 boîtes au hasard, la probabilité que toute l'équipe s'en sorte est de 2^{-100}).

Exercice II.12: *Probabilité intuitive sur $\mathbb{N}^*$?*

On sait qu'il n'existe pas de probabilité uniforme sur $\mathbb{N}$ (pourquoi ?). On veut maintenant savoir s'il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathbb{N}$ telle qu'un entier tiré au hasard suivant cette loi $\mathbb{P}$ ait une probabilité $1/2$ d'être pair, $1/3$ d'être multiple de 3, etc. Notons $n\mathbb{N}$ l'ensemble des multiples de l'entier n (y compris 0). On suppose qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(n\mathbb{N}) = \dfrac{1}{n}$.

1) Montrer que nécessairement $\mathbb{P}(\{0\}) = 0$.
2) Prouver la relation : $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^{-1}\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^{-1} = \displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{k_1+k_2=m}\frac{1}{2^{k_1}3^{k_2}}$
3) Soit p_i le i-ème nombre premier. On pose, pour $1 \leq k \leq n$, $\pi_{k,n} = \displaystyle\prod_{i=k}^{n}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$.

   Justifier que
$$\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)^{-1} = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{k_1+\ldots+k_n=m}\frac{1}{p_1^{k_1}\ldots p_n^{k_n}} \geq \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}$$
4) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\pi_{1,n}$ puis $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\pi_{k,n}$ (k fixé).
5) Montrer que si les entiers a et b sont premiers entre eux, $\mathbb{P}(a\mathbb{N}\cap b\mathbb{N}) = \mathbb{P}(a\mathbb{N})\mathbb{P}(b\mathbb{N})$.
   En déduire que $\mathbb{P}(a\bar{\mathbb{N}}\cap b\bar{\mathbb{N}}) = \mathbb{P}(a\bar{\mathbb{N}})\mathbb{P}(b\bar{\mathbb{N}})$
6) On note pour alléger $E_i = p_i\mathbb{N}$. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n}\bar{E_i}\right) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(E_i)$.

   En déduire la valeur de $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcap_{i=k}^{+\infty}\bar{E_i}\right)$ pour tout $k \geq 1$.
7) Montrer que $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcup_{i=k}^{+\infty}E_i\right) = 1$ pour tout k et en déduire que $\mathbb{P}([\![0, k-1]\!]) = 0$ pour tout k, ce qui est manifestement absurde (pourquoi ?)

Conditionnement et indépendance

Exercice II.13:

Nous sommes à l'époque de l'inquisition, et un homme est accusé d'hérésie. Il est longuement questionné. On note A, i et C les évènements "l'accusé avoue", "l'accusé est innocent et "l'accusé est coupable".

On pose $p = \mathbb{P}(C)$ et on définit le rapport d'aveux r par $r = \dfrac{\mathbb{P}(A|I)}{\mathbb{P}(A|C)}$.

1) Calculer $\mathbb{P}(C|A)$ en fonction de r et p.
2) Dans quel cas a-t-on $\mathbb{P}(C|A) > \mathbb{P}(C)$.
3) Proposer une interprétation du cas $r > 1$.

Exercice II.14:

On s'intéresse à la répartition des sexes des n enfants d'une famille. On prend comme univers $\Omega = \{\mathtt{f}, \mathtt{g}\}^n$ muni de l'équiprobabilité.

On considère les évènements $A = \{$la famille a des enfants des deux sexes$\}$ et $B = \{$la famille a au plus une fille$\}$.

1) Montrer que pour $n \geq 2$, $\mathbb{P}(A) = \dfrac{2^n - 2}{2^n}$ et $\mathbb{P}(B) = \dfrac{n+1}{2^n}$.
2) En déduire que A et B sont indépendants si et seulement si $n = 3$.

Exercice II.15:

Trois personnes A, B et C lancent à tour de rôle une pièce de monnaie ($ABCABCABC$...). La probabilité d'obtenir pile est $p \in]0, 1[$. Le gagnant est le premier qui obtient pile, la partie s'arrête alors. On note A_n l'évènement $\{$le joueur A gagne au n-ième lancer$\}$, de même pour B_n et C_n.

1) Calculer $\mathbb{P}(A_1)$, $\mathbb{P}(B_2)$, $\mathbb{P}(C_3)$. Les évènements A_1 et B_2 sont-ils indépendants ?
2) En discutant selon les valeurs de n, calculer $\mathbb{P}(A_n)$, $\mathbb{P}(B_n)$, $\mathbb{P}(C_n)$.
3) Calculer la probabilité de gagner de chacun des trois joueurs.
4) Calculer la probabilité qu'il y ait un gagnant.

Exercice II.16:

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \geq n$. On dispose de n urnes numérotées. L'urne numéro $k \in [\![1, n]\!]$ contient k boules blanches et $N - k$ boules noires. On tire successivement dans chaque urne, de la première à la $(n-1)$-ième (dans cet ordre), en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne suivante avant de tirer de nouveau. On effectue ensuite un dernier tirage dans l'urne numéro n. Déterminer la probabilité p_n que la dernière boule tirée soit blanche.

Exercice II.17:

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On tire successivement avec et sans remise, en commençant par un tirage avec remise. Si lors d'un tirage avec remise on tire une boule blanche, on rajoute dans l'urne une boule blanche en plus de celle qu'on a tirée, qu'on remet également dans l'urne. On arrête l'expérience dès qu'on retire de l'urne l'unique boule noire (sans l'y remettre).

1) Quelle est la probabilité d'avoir effectué exactement n tirages ?
2) Montrer que l'expérience s'arrête presque sûrement.

Exercice II.18:

Soit Ω un ensemble fini dont le cardinal est un nombre premier. On le munit de l'équiprobabilité $\mathbb{P}$. Soient A et B deux parties de Ω distinctes chacune de $\emptyset$ et de Ω. Démontrer que A et B ne sont pas indépendantes.

Exercice II.19: *La ruine du joueur*

Deux joueurs A et B, munis respectivement de sommes d'argent a et b, jouent des parties successives, avec une probabilité p que A gagne et $q = 1 - p$ que B gagne. Celui qui perd donne un euro au vainqueur. Ils continuent jusqu'à la ruine de l'un des deux joueurs.

1) Quelle est la probabilité que A soit ruiné, notée $p(a)$ (car dépendante de la fortune initiale) ? On pourra distinguer selon le résultat du premier tour.
2) Limite quand $b \to +\infty$ et commentaire.
3) Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement.

Exercice II.20: *Borel-Cantelli*

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évènements d'un espace probabilisé. On note

$$A = \limsup A_n = \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ appartient à une infinité de } A_n\}$$

1) Exprimer A en fonction des A_n.

2) Montrer que si $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$, alors $\mathbb{P}(A) = 0$.

3) Montrer que si les A_n sont mutuellement indépendants et si $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$ alors $\mathbb{P}(A) = 1$.

Exercice II.21:

On rappelle que si A est un évènement, la variable aléatoire indicatrice de A est la fonction définie sur Ω par $\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'évènements indépendants. On note $p_i = \mathbb{P}(A_i)$ et on suppose que $a = \sum_{i=1}^{+\infty} p_i < +\infty$.

Le but de l'exercice est de prouver l'inégalité

$$\forall (n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2, \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i} \geq k\right) \leq \frac{a^k}{k!}$$

La dernière question propose une application de cette inégalité.

1) Que peut-on dire du cas $k > n$? On suppose dans la suite $k \leq n$.

2) On note $B_{n,k} = \{\omega \in \Omega | \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i}(\omega) \geq k\}$.

   Justifier l'inclusion $B_{n,k} \subset \bigcup_{\substack{F\subset[\![1,n]\!] \\ \text{card}F=k}} \bigcap_{i\in F} A_i$

3) En déduire que $\mathbb{P}(B_{n,k}) \leq \sum_{\substack{F\subset[\![1,n]\!] \\ \text{card}F=k}} \prod_{i\in F} p_i$

4) On note $a_n = \sum_{i=1}^{n} p_i$.

   Montrer que $a_n^k \geq k! \sum_{\substack{F\subset[\![1,n]\!] \\ \text{card}F=k}} \prod_{i\in F} p_i$

   Indication : On remarquera que $a_n^k = \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in[\![1,n]\!]^k} p_{i_1} \ldots p_{i_k}$.

5) Conclure.

6) Application à un problème de tir. Dans un stand de tir, une cible mobile traverse le champ visuel d'un tireur, une fois par épreuve. A chaque épreuve, le tireur tire un coup sur la cible. D'une épreuve à la suivante, la vitesse de la cible augmente de 20 %. On suppose que pour un tireur donné, la probabilité de toucher la cible est inversement proportionnelle à la vitesse de la cible. Elle vaut ainsi $p \in]0,1[$ pour le premier tir, $5p/6$ pour le second, etc. Les tirs sont supposés indépendants, le tireur dispose d'autant de cartouches qu'il le souhaite et le défi qu'il doit relever est celui de toucher au moins 20 fois la cible. En utilisant le résultat ci-dessus, majorer sa probabilité de réussir (indépendamment de p).

Exercice II.22: *Loi zeta*

Soit $a \in]1, +\infty[$. On définit le réel $\zeta(a)$ par $\zeta(a) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^a}$.

On peut alors définir une probabilité $\mathbb{P}_a$ sur $\mathbb{N}^*$ en posant $p_k = \frac{1}{\zeta(a)k^a}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

On dit que $\mathbb{P}_a$ est la loi zeta de paramètre a.

1) Si $m \in \mathbb{N}^*$, on note $m\mathbb{N}^*$ l'ensemble $\{km, k \in \mathbb{N}^*\}$ de ses multiples. Calculer $\mathbb{P}(m\mathbb{N}^*)$.

2) Donner une CNS sur les entiers $j > 1$ et $m > 1$ pour que les évènements $A = j\mathbb{N}^*$ et $B = m\mathbb{N}^*$ soient $\mathbb{P}_a$-indépendants.

3) Soit p_i le i-ème nombre premier. On note $A_i = p_i\mathbb{N}^*$. Montrer que les $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendants.

4) Soit C_n l'ensemble des entiers de $\mathbb{N}^*$ divisibles par aucun des p_i pour $i \in [\![1, n]\!]$. Calculer $\mathbb{P}_a(C_n)$.

5) Déterminer $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} C_n$.

6) En déduire la formule d'Euler :

$$\forall a > 1, \quad \zeta(a) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^a} = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_i^a}\right)^{-1} = \prod_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_i^a}\right)^{-1}$$

Variables aléatoires discrètes, moments

Exercice II.23:

On dispose de n paires de chaussettes mélangées dans un tiroir. On tire les chaussettes une à une, et on dit qu'on reconstitue une paire lorsqu'on en a tiré les deux composantes. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour reconstituer la première paire.

1) Calculer $\mathbb{P}(X > k)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

2) En déduire un équivalent de $\mathbb{E}(X)$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice II.24:

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire une poignée aléatoire, éventuellement vide, comportant Y jetons. On note X la somme des numéros obtenus. Si Y suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$, déterminer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice II.25: *Loi hypergéométrique et convergence vers la loi binomiale*

Dans une population totale de N canards dont M sont boîteux, on prélève au hasard n canards sans remise. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de canards boîteux dans l'échantillon.

1) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.

   On dit que X suit la loi hypergéométrique de paramètres N, M et n : on note $X \sim \mathcal{H}(N, M, n)$.

2) On suppose que quand $N \to +\infty$, $M = M(N)$ tend vers $+\infty$ en vérifiant la condition $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{M(N)}{N} = p$ avec $p \in]0, 1[$. On fixe $n \in \mathbb{N}$.

   On se donne (X_N) une suite de variables aléatoires avec $X_N \sim \mathcal{H}(N, M(N), n)$ et Y une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, alors : $\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \mathbb{P}(X_N = k) \xrightarrow[N\to\infty]{} \mathbb{P}(Y = k)$

Exercice II.26: *Convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson*

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telles que X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$, où la suite p_n vérifie $np_n \to \lambda$ quand $n \to \infty$.
Soit Y une variable aléatoire de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.
Montrer que pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(Y = k)$.

Exercice II.27: *Absence de mémoire*

1) Montrer que si X est une variable aléatoire de loi géométrique, elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}(X > n + k | X > n) = \mathbb{P}(X > k)$$

   Interpréter ce résultat en terme de temps d'attente.

2) Trouver toutes les lois qui vérifient cette propriété. Indication : on notera $G(n) = \mathbb{P}(X > n)$ et on trouvera une relation simple entre $G(n+k)$, $G(n)$ et $G(k)$.

Exercice II.28: *Loi binomiale négative*

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Donner le développement en série entière de $q \mapsto (1-q)^{-n}$. Dans la suite on note $p = 1 - q$.
2) En déduire qu'en posant $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n+k-1}{k} p^n q^k$, on définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$. Cette loi s'appelle loi binomiale négative de paramètres n et p.
3) On considère une urne contenant n_1 boules vertes et n_2 boules rouges : notons $p = n_1/(n_1+n_2)$. On effectue des tirages avec remise d'une boule dans l'urne jusqu'à obtention de la n-ième boule verte. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges ainsi tirées. Quelle est la loi de Y ?

Exercice II.29:

On jette deux dés dont l'un est équilibré, l'autre truqué de façon inconnue. On note X, Y les nombres de points indiqués respectivement par le premier et le second dé. La variable aléatoire X suit ainsi la loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$, tandis que la loi de Y nous est inconnue : on sait seulement que l'ensemble des valeurs possibles est $[\![1,6]\!]$. On suppose que le truquage n'affecte pas l'indépendance des deux dés. On note R la variable aléatoire égale au représentant dans $[\![0,5]\!]$ de la classe d'équivalence de $X+Y$ modulo 6.

1) Montrer sans calcul que pour tout $r \in [\![0,5]\!]$ et $j \in [\![1,6]\!]$ il existe un unique $i \in [\![1,6]\!]$ tel que $i + j = r\ [6]$.
2) Expliquer pourquoi l'évènement $\{R = r\}$ est réunion de 6 évènements deux à deux disjoints du type $\{X = i, Y = j\}$. Expliciter cette décomposition pour $\{R = 3\}$.
3) Calculer $\mathbb{P}(R = r)$ pour $r \in [\![0,5]\!]$ et en déduire que R suit la loi uniforme sur $[\![0,5]\!]$ quel que soit le truquage du deuxième dé.

Exercice II.30: *Variables entières*

1) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $[\mathbb{P}(X \geq n)]$ converge, et qu'on a alors $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$.
2) Trouver une formule similaire pour la variance, en fonction de $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$ et de $\sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X \geq n)$.

Exercice II.31: *Le collectionneur*

Une marque de yaourts insère dans chaque paquet un magnet à coller sur le frigo. Il y a k magnets différents à collectionner. Déterminer le nombre moyen de paquets de yaourts à acheter avant de les avoir tous (on pourra utiliser 30).

Exercice II.32: *Une loi discrète pathologique*

Le but est d'étudier une variable aléatoire discrète qui peut prendre toutes les valeurs dans l'ensemble $\mathbb{D} \cap [0,1[$ des nombres décimaux de $[0,1[$ (les décimaux sont ceux qui ont un développement décimal fini, ou de manière équivalente ceux qui s'écrivent $k10^{-n}$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$).

On dispose de deux urnes. La première contient des boules rouges en proportion p et des vertes en proportion $q = 1-p$ (où $p \in]0,1[$). La deuxième contient 10 boules numérotées de 0 à 9. On effectue des tirages avec remise dans la première urne jusqu'à la première apparition d'une rouge. On note N le nombre (aléatoire) de tirages nécessaires. Une fois la valeur de N connue pour l'expérience en cours, on effectue N tirages avec remise d'une boule dans la deuxième urne. En notant Y_j le chiffre sorti lors du j-ème tirage dans la deuxième urne (avec $j \leq N$), on forme le nombre :

$$X(\omega) = \sum_{j=1}^{N(\omega)} \frac{Y_j(\omega)}{10^j} = 0, Y_1(\omega)Y_2(\omega)...Y_{N(\omega)}(\omega)$$

1) Quelle est la loi de N ?
2) Soit n fixé. Lorsqu'on effectue n tirages dans la deuxième urne, quelle est la probabilité d'obtenir une suite de n chiffres particulière choisie à l'avante.
3) Calculer $\mathbb{P}(X = 0.375)$.
4) Soit $d \in \mathbb{D} \cap [0, 1[$ et $k10^{-n}$ sa forme réduite. Calculer $\mathbb{P}(X = d)$.
5) Vérifier que $\mathbb{D} \cap [0, 1[$ est dénombrable.
6) Montrer qu'il n'existe pas de numérotation crosisante des éléments de $X(\Omega)$.
7) Calculer l'espérance de X. Le résultat dépende de p. Montrer que dans tous les cas, $9/20 \leq \mathbb{E}(X) \leq 1/2$. Commenter ce résultat. Interpréter les cas limites $p = 0$ et $p = 1$.
8) Soit $F : t \in [0, 1[\mapsto \mathbb{P}(X \leq t)$. Montrer que X n'est constante sur aucun intervalle de $[0, 1[$.
9) Montrer que F est continue en tout réel non décimal de $[0, 1[$, et discontinue en tout décimal.
10) Detailler le calcul de $\mathbb{P}(X \leq 0.375|N = j)$ en distinguant les cas $j < 3$ et $j \geq 3$.
11) Généraliser en montrant que $\forall d \in \mathbb{D} \cap [0, 1[$, $\mathbb{P}(X \leq d|N = j) = \dfrac{\lfloor 10^j d \rfloor + 1}{10^j}$
12) Calculer $F(k/10)$ pour $0 \leq k \leq 9$ et $F(m/100)$ pour $0 \leq m \leq 99$.
13) Peut-on donner une formule générale pour $F(d)$, $d \in \mathbb{D} \cap [0, 1[$?

Exercice II.33: *Caractère universel de la loi de Poisson*

Familles de variables aléatoires

Exercice II.34:

On lance indéfiniment le même dé. Soit X le numéro du premier lancer où l'on obtient 3 et Y celui du premier lancer où l'on obtient 4.

1) Quelles ont les lois de X et Y ? Sont-elles indépendantes ?
2) Pour le k-ième lancer, on note A_k l'évènement "obtention d'un 3", B_k celle d'un 4 et C_k celle d'aucun de ces deux chiffres. Exprimer à l'aide de ces notations l'évènement $\{X = i, Y = j\}$. En déduire la loi du couple (X, Y).
3) Donner sans calcul (mais en justifiant) les valeurs de $\mathbb{P}(X < Y)$ et $\mathbb{P}(X > Y)$.
4) On définit la variable aléatoire $Z = 3^X 4^Y$. Quelle est la probabilité que Z soit une puissance de 36 ?

Exercice II.35:

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur un même espace probabilisé. On suppose que leur loi conjointe est donnée par $\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}(X = j, Y = k) = \dfrac{a(j + k)}{2^{j+k}}$.

1) Quelle est la valeur de a ?
2) Déterminer les lois marginales.
3) X et Y sont-elles indépendantes ?
4) Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

Exercice II.36:

Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On effectue N épreuves de Bernouilli indépendantes de paramètre p, on note S le nombre de succès et E le nombre d'échecs obtenus.

1) Montrer que si $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors S et E suivent des lois de Poisson dont on déterminera les paramètres. Montrer que S et E sont indépendantes.
2) Réciproquement, montrer que si S et E sont indépendantes, N suit une loi de Poisson.

Exercice II.37:

Un militant entreprend de faire signer une pétition à l'entrée d'un supermarché. Le nombre de personnes X qu'il peut ainsi contacter suit une loi de Poisson de paramètre α. Soit p la probabilité qu'une personne ainsi sollicitée signe la pétition. On note Y le nombre total de signatures et Z celui des refus : $X = Y + Z$.

1) Soient j et k deux entiers. En distinguant les cas $j > k$ et $j \leq k$, calculer $\mathbb{P}(Y = j | X = k)$.
2) En déduire $\mathbb{P}(X = k, Y = j)$.
3) Déterminer la loi de Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4) En utilisant le résultat de la question 2, déterminer la loi du couple (Y, Z).
5) Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

Exercice II.38:

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ définies sur un même espace probabilisé.

1) On pose $U = X_1 + X_2$ et $V = X_1 - X_2$. Calculer $\mathrm{cov}(U, V)$. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?
2) Mêmes questions avec $Y = \inf(X_1, X_2)$ et $Z = \sup(X_1, X_2)$.

Exercice II.39: *Loi binomiale négative et temps d'attente*

1) On considère une suite d'épreuves de Bernouilli indépendantes avec pour chacune la même probabilité p de succès. Soit Y le nombre aléatoire d'épreuves avant le premier succès (potentiellement 0). Quelle est la loi de Y ?
2) Donner une formule générale permettant de calculer la loi de $T_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$, où les variables aléatoires Y_i ont la même loi que Y et sont indépendantes (on pourra utiliser l'exercice 1).
3) Soient U et V deux variables aléatoires suivant la loi binomiale négative de paramètres respectifs (n, p) et (m, p) (voir l'exercice 28). Donner sans calcul la loi de $U + V$.

Exercice II.40: *Maximum*

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur un même espace probabilisé, mutuellement indépendantes et de même loi. On note pour $n \in \mathbb{N}^*$ $M_n = \max(X_1, ..., X_n)$.

1) Si $k \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(M_n \leq k)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_1 \leq k)$.
2) On suppose que les X_n suivent la loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$ avec N fixé. Déterminer $\mathbb{E}(M_n)$ et sa limite quand $n \to \infty$ (on pourra utiliser 30).
3) On suppose que les X_n suivent la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Calculer $\mathbb{E}(M_n)$.
   Déterminer la loi de $m_2 = \min(X_1, X_2)$ et en déduire $\mathbb{E}(|X_1 - X_2|)$.

Exercice II.41: *Permutation aléatoire bis*

Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n. On effectue des tirages indépendants avec remise jusqu'à ce que chaque jeton soit sorti au moins une fois. Soit N le nombre (aléatoire) de jetons tirés et S la liste (aléatoire) des numéros obtenus dans l'ordre sans répétition.

1) Prouver que $\mathbb{P}(N < +\infty) = 1$.
2) On note N_1 le nombre de jetons tirés avant de sortir un jeton différent du premier, N_2 le nombre de jetons tirés avant de sortir un jeton différent des deux premiers, etc. Déterminer les lois de $N_1, ..., N_2$ et en déduire $\mathbb{E}(N)$.
3) Montrer que S suit la loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$.

Exercice II.42: *Séries à pile ou face*

On lance une infinité de fois une pièce ayant une probabilité $p \in]0, 1[$ de tomber sur "pile". Si $\omega \in \{P, F\}^{\mathbb{N}}$ est une issue de l'expérience, on décompose la suite ω en sous-suites de résultats identiques consécutifs appelées séries, le résultat changeant d'une série à l'autre. On note $L_1(\omega), L_2(\omega), L_3(\omega), ...$ les longueurs de ces séries.

Les fonctions L_i sont bien définies sur le sous ensemble $\Omega' \subset \Omega$ constitué des suites comportant une infinité de "pile"" et une infinité de "face".

1) Montrer que Ω' est un évènement et que $\mathbb{P}(\Omega') = 1$. Dans la suite, on se place dans l'espace probabilisé Ω' et on considère la restriction de $\mathbb{P}$ à cet espace. On admet que les L_i sont alors des variables aléatoires.
2) Déterminer la loi de L_1 et son espérance.
3) Déterminer la loi conjointe de (L_1, L_2). En déduire la loi de L_2 et son espérance.
4) Expliquer pourquoi L_1 et L_2 n'ont pas même loi. Sont-elles indépendantes ?
5) Montrer que L_3 a même loi que L_1, et que L_1 et L_3 ne sont pas indépendantes si $p \neq 1/2$.

Exercice II.43: *Série de variables aléatoires*

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, suivant toutes la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$ et on note α un paramètre strictement positif $\neq 1$.

L'objet de l'exercice est de calculer la probabilité que la série de terme général $(n^\alpha X_n)^{-1}$ soit convergente, autrement dit de calculer $\mathbb{P}(A)$, où

$$A = \left\{ w \in \Omega, \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)} \text{ converge} \right\}$$

1) Calculer $\mathbb{P}(A)$ si $\alpha > 1$.
2) On suppose désormais $\alpha \in]0,1[$ et on pose $\beta = 1 - \alpha$.
   Montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{n=k}^{+\infty} [X_n \leq n^\beta] \right) = 0$
3) En déduire $\mathbb{P}(A)$.

Exercice II.44: *Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^2$*

On considère un ivrogne se déplaçant au hasard dans un plan de la manière suivante :

- Le temps est discret, indexé par $n \in \mathbb{N}$.
- A chaque instant, l'ivrogne choisit une direction aléatoirement parmi Nord, Sud, Est et Ouest, chacune avec une probabilité $1/4$, puis fait un pas dans cette direction.
- Les décisions à chaque instant sont mutuellement indépendantes.

Le but de l'exercice est de prouver que, presque sûrement, l'ivrogne repassera une infinité de fois par son point de départ.

On note $Z_n = (X_n, Y_n)$ sa position à l'instant n dans le repère, et N la variable aléatoire définie par $N = \text{card}\{n \in \mathbb{N} \mid Z_n = (0,0)\}$, à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.Elle compte le nombre de retours au départ au cours de la marche tout entière. Le but est de montrer que la variable aléatoire N vérifie $\mathbb{P}(N = +\infty) = 1$.

1) Montrer que $\mathbb{P}(N \geq 2) = \mathbb{P}(N \geq 1)^2$ puis généraliser.
2) En déduire qu'il suffit de prouver que la série de terme général $\mathbb{P}(N \geq k)$ est divergente.
3) Exprimer $\mathbb{P}(Z_n = (0,0))$ comme somme de coefficients binomiaux.
4) Montrer l'égalité $\displaystyle\sum_{i+j=p} \binom{N}{i}\binom{M}{j} = \binom{N+M}{p}$
5) En déduire une expression simple pour $\mathbb{P}(Z_{2n} = (0,0))$ et un équivalent quand $n \to \infty$. La série de terme général $\mathbb{P}(Z_{2n} = (0,0))$ est-elle convergente ?
6) Pour $n \in \mathbb{N}$ soit N_n la variable aléatoire qui vaut 1 si $Z_{2n} = (0,0)$ et 0 sinon. Montrer que $\mathbb{E}(N_0 + ... + N_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.
7) Conclure.

Exercice II.45: *Marche aléatoire en triangle*

Dans tout le problème, j désigne le complexe $\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$. On lance un dé équilibré (six faces numérotées de 1 à 6). On note F la variable aléatoire donnant le nombre obtenu, et Z la variable aléatoire j^F.

1) (a) Calculer $1+j+j^2$. Que dire du triangle de sommets $1, j, j^2$?

   (b) Montrer que pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $a+bj+cj^2 = 0 \iff a=b=c$

   (c) Montrer que Z est à valeurs dans $\{1, j, j^2\}$ et que $\mathbb{P}(Z=1) = \mathbb{P}(Z=j) = \mathbb{P}(Z=j^2) = 1/3$

2) On considère un entier n, et on lance le dé n fois de façon indépendante. On note F_k le résultat du k-ième lancer, et $Z_k = j^{F_k}$. On pose $S_n = Z_1 + ... + Z_n$ et $p_n = \mathbb{P}(S_n = 0)$. On note $U_n = \text{card}\{k \in [\![1,n]\!] | Z_k = 1\}$, $V_n = \text{card}\{k \in [\![1,n]\!] | Z_k = j\}$ et $W_n = \text{card}\{k \in [\![1,n]\!] | Z_k = j^2\}$.
   Exprimer S_n en fonction de U_n, V_n et W_n. En déduire que $S_n = 0$ si et seulement si $U_n = V_n = W_n$.

3) On suppose qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3m$.

   (a) Pourquoi fait-on cette supposition ?

   (b) Montrer que U_n suit une loi binômiale dont on précisera les paramètres. En déduire $\mathbb{P}(U_n = m)$.

   (c) Calculer $\mathbb{P}(V_n = m \mid U_n = m)$.

   (d) En déduire le résultat : $p_{3m} = 3^{-3m}\binom{3m}{m}\binom{2m}{m}$.

4) Montrer que pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{p_{3m+3}}{p_{3m}} \geq \dfrac{m}{m+1}$, en déduire que $p_{3m} \geq \dfrac{2}{9m}$.

5) Soit $X_n = \text{card}\{k \in [\![1,n]\!] | S_k = 0\}$.

   (a) Calculer $\mathbb{E}(X_n)$.

   (b) En déduire que $\mathbb{E}(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

6) Soit $q_n = \mathbb{P}(X_n > 0)$ la probabilité que l'on atteigne 0 au moins une fois avant l'instant n. Le but est de montrer que q_n converge vers 1.

   (a) Montrer que (q_n) admet une limite.

   (b) Pour $(r,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, montrer que $\mathbb{P}(X_n \geq r) \leq q^r$.

   (c) En déduire que $\mathbb{E}(X_n) \leq q + q^2 + ... + q^n$.

   (d) Conclure.

Loi des grands nombres, convergences

Exercice II.46:

Soit $(\mathbb{P}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de probabilités sur $\mathbb{N}$ muni de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. On suppose que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la suite $(\mathbb{P}_k(\{n\}))_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite $p_n \in [0,1]$.

1) (a) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n \leq 1$.

   (b) Donner un exemple où $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n < 1$.

2) On suppose maintenant $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$ et on pose pour tout $(k,n) \in \mathbb{N}^2$, $a_{k,n} = \min(\mathbb{P}_k(\{n\}), p_n)$.

   (a) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{k,n} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$ et en déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |\mathbb{P}_k(\{n\}) - p_n| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

   (b) Pour $X \subset \mathbb{N}$, montrer que $\mathbb{P}_k(X) \xrightarrow[k\to\infty]{} \displaystyle\sum_{n\in X} p_n$

   (c) Prouver enfin que $X \mapsto \displaystyle\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}_k(X)$ est une probabilité sur $\mathbb{N}$.

Exercice II.47: *Convergence en probabilités, convergence presque sûre*

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, et soit X une variable aléatoire définie sur le même espace. On dit que :

- (X_n) converge en probabilité vers X si $\forall\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
- (X_n) converge presque sûrement vers X si $\mathbb{P}(\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} X(\omega)) = 1$.

Montrer que la convergence presque sûre implique la convergence en probabilité.

Exercice II.48: *Inégalité de Hoeffding*

Soit Z une variable aléatoire réelle vérifiant $a \leq Z \leq b$ presque sûrement. On se propose de démontrer :

$$\mathbb{E}[\exp(Z - \mathbb{E}(Z))] \leq \exp\left(\frac{(b-a)^2}{8}\right)$$

1) Soient $t > 0$ et $d \in \mathbb{R}$. On définit la fonction $g\colon x \mapsto \exp(t(x-d))$. Vérifier que cette fonction est convexe. En déduire :

$$\forall x \in [a,b], \quad \mathrm{e}^{t(x-d)} \leq \frac{b-x}{b-a}\mathrm{e}^{t(a-d)} + \frac{x-a}{b-a}\mathrm{e}^{t(b-d)}$$

2) En prenant $d = \mathbb{E}(Z)$, déduire de la question précédente l'inégalité :

$$\mathbb{E}[\exp(t(Z-d)) \leq \frac{b-d}{b-a}\mathrm{e}^{t(a-d)} + \frac{d-a}{b-a}\mathrm{e}^{t(b-d)}$$

3) On pose

$$f\colon t \mapsto \ln\left[\frac{b-d}{b-a}\mathrm{e}^{ta} + \frac{d-a}{b-a}\mathrm{e}^{tb}\right] - td$$

Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $f''(t) \leq \dfrac{1}{4}(b-a)^2$.

Exercice II.49: *Inégalité de Bernstein*

Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ il existe des constantes a_i et b_i telles que $a_i \leq X \leq b_i$ presque sûrement. Notre but est de démontrer que

$$\forall t > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}(X_i))\right|\right) \leq 2\exp\left(\frac{-2t^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right)$$

1) Fixons $t > 0$. On note $S_n = X_1 + ... + X_n$. Montrer que pour tout $u > 0$,

$$\mathbb{P}[(S_n - \mathbb{E}(S_n)) \geq t] \leq \exp\left[-ut + \frac{u^2}{8}\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2\right]$$

2) Optimiser cette inégalité en u.
3) Démontrer une inégalité analogue pour $\mathbb{P}[(S_n - \mathbb{E}(S_n)) \leq -t]$ et conclure.
4) Lorsque les X_i sont des variables de Bernouilli de paramètre p, en déduire que

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2\exp(-2n\varepsilon)$$

Séries génératrices

Exercice II.50:

Montrer qu'il n'est pas possible de piper deux dés de telle sorte que leur somme suive une loi uniforme sur $[\![2,12]\!]$.

Exercice II.51: *Formule de Wald*

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et N des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur un même espace probabilisé, mutuellement indépendantes, les X_n étant toutes de même loi. On considère $S = X_1 + ... + X_N$ (somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires).

1) Montrer que S est une variables aléatoire et déterminer sa fonction génératrice $\mathcal{G}_S$ en fonction de $\mathcal{G}_N$ et de $\mathcal{G}_{X_1}$.
2) En déduire $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1)$ (avec la convention $0 \times \infty = \infty \times 0 = 0$).

Exercice II.52: *Nombres de Bell*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n le nombre de partitions de l'ensemble $[\![1, n]\!]$, avec par convention $B_0 = 1$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n}{k} B_k$.
2) Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $f : z \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$ est strictement positif, et calculer $f(z)$ pour $|z| < R$.
3) En déduire que $B_n = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$.

Probabilités et algèbre

Exercice II.53:

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{F}_p$.

1) Déterminer le nombre de familles libres de E.
2) Déterminer le nombre de projecteurs et de symétries de E.

Exercice II.54:

Soit A un ensemble fini de cardinal $m \geq 2$, et $U_1, ..., U_n$ des parties non vides deux à deux distinctes de A. On suppose qu'il existe un entier a tel que pour tout $i \neq j$, $\mathrm{card}(U_i \cap U_j) = a$.

1) Soit $M = (m_{i,j})$ où $m_{i,j} = \mathbf{1}_{U_j}(i)$, et $H = {}^tMM$. Etudier l'inversibilité de H.
2) Montrer que $n \leq m$.

Exercice II.55: *Probabilité de commuter dans un groupe non abélien .*

Soit G un groupe fini non abélien, on note $Z = \{x \in G, \forall y \in G, xy = yx\}$ et $C = \{(x, y) \in G^2, xy = yx\}$.

1) Soit H un sous-groupe de G. On définit la relation $\sim_H$ sur G par $x \sim_H y \iff xy^{-1} \in H$. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. En déduire le théorème de Lagrange : $|H|$ divise $|G|$.
2) Montrer qu'on peut munir G/Z (ensemble des classes d'équivalence sous la relation $\sim_Z$) d'une structure de groupe induite : c'est le groupe quotient de G par Z.
3) Montrer que si G/Z est monogène, G est abélien.
4) On tire au hasard un élément de G. Montrer que la probabilité qu'il appartienne à Z est inférieure à $1/4$.
5) On tire au hasard deux éléments de G. Montrer que la probabilité qu'ils commutent est inférieure à $5/8$.

Exercice II.56: *Probabilité que deux entiers soient premiers entre eux*

Soit r_n la probabilité que deux entiers choisis au hasard dans $[\![1, n]\!]$ soient premiers entre eux. On se propose de montrer que

$$r_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{6}{\pi^2}$$

Soit μ la fonction de Möbius définie par

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \text{ possède au moins un facteur carré} \\ (-1)^k & \text{sinon, où } k \text{ est le nombre de facteurs premiers simples de } n \end{cases}$$

Soient $p_1, ..., p_k$ les nombres premiers $\leq k$, et pour $i \in [\![1, k]\!]$ soit $V_i = \{(a, b) \in [\![1, n]\!]^2,\ p_i | a \text{ et } p_i | b\}$.

1) Montrer à l'aide de la formule de Poincaré 4 que

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} V_i\right| = -\sum_{\substack{I\subset[\![1,n]\!]\\ I\neq\emptyset}} (-1)^{|I|} \left\lfloor \frac{n}{\prod_{i\in I} p_i} \right\rfloor^2 = -\sum_{d=2}^{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2$$

En déduire une expression de r_n.

2) Montrer que $\left| r_n - \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2} \right| = O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$

3) Montrer que $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\right)\left(\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2}\right) = \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{k|j} \frac{\mu(k)}{j^2} = 1$

4) Conclure.

La méthode probabiliste

Exercice II.57:

Montrer qu'il est possible de colorier tous les entiers de 1 à 2016 avec 4 couleurs de manère à n'avoir aucune progression arithmétique monochrome de longueur 11.

Exercice II.58: *Tournois k-indécis*

Soient n et k deux entiers. Au cours d'un tournoi entre n joueurs, chaque couple s'affronte exactement une fois. On dit qu'un tournoi est k-indécis si pour tout ensemble A de joueurs avec $|A| = k$, il existe un joueur qui a battu tous ceux de A.

1) On note $G_{n,k}$ l'évènement : il existe un groupe A de k joueurs dont personne n'a battu tous les membres. Montrer que $\mathbb{P}(G_{n,k}) \leq \binom{n}{k}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-k}$.

2) En déduire que pour tout k, il existe un tournoi k-indécis à plus de k joueurs.

Exercice II.59: *Lemme de Sperner*

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de sous-ensembles de $[\![1, 2n]\!]$. On suppose que $\forall (B, C) \in \mathcal{A}^2$, $B \neq C \implies B \not\subset C$.
On dit que $\mathcal{A}$ est une antichaîne.

1) On considère une chaîne aléatoire $\mathcal{B}$: un ensemble de sous-ensembles de $[\![1, 2n]\!]$ tous inclus les uns dans les autres et de cardinaux augmentant de 1 à chaque étape. On ajoute les éléments un par un de manière équiprobable. Montrer à l'aide de ce modèle l'inégalité

$$\sum_{B\in\mathcal{A}} \frac{1}{\binom{n}{|B|}} \leq 1$$

2) En déduire $|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.